L2 GC - Pré-Ing2 GC
Juin 2023
Durée 1,5 heures

Examen de mathématiques 2 : Session 2

L'utilisation ou la consultation de téléphone est formellement interdite, les téléphones doivent être rangés dans un sac et éteints. Les documents sont interdits, une feuille A4 manuscrite est toutefois autorisée, ainsi qu'une calculatrice.
Barème indicatif : 4+4+7+5

Exercice 1: Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2-4}\,\mathrm{d}x$

Exercice 2: On note $\theta = \arccos(\frac{1}{\sqrt{5}}) \in]0,\pi[$. Résoudre l'équation

$$\cos x = 2\sin x$$

On exprimera les solutions en fonction de θ.

Exercice 3: Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction autant de fois dérivable que nécessaire qui vérifie

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(1;2) = 1;\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}(1;2) = -2;\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(1;2) = 1;\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(1;2) = 0;\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}(1;2) = -1$$

On définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f(t) = \varphi(t^2, 1+t)$

1. Écrire un DL_2 de φ en $(1,2)$.
2. Calculer $f'(t)$.
3. Calculer $f''(t)$.
4. Écrire un DL_2 de f en 1.
5. φ possède-t-elle un extremum local en $(1,2)$?
6. f possède-t-elle un extremum local en 1 ?

Exercice 4: On cherche à montrer que de tous les parallélépipèdes rectangles dont la somme des longueurs de tous les côtés est égale à 4, le cube est celui de volume maximal.

1. Expliquer pourquoi le problème se ramène à maximiser la fonction de deux variables définie sur le triangle $T = \{(x,y) \in]0;1[^2 / x+y<1\}$ par $\varphi(x,y) = xy - x^2y - xy^2$.
2. Montrer que φ possède un unique point critique.
3. Montrer que φ possède un maximum local strict en ce point critique.
4. Peut-on conclure ?