L2 GC - Pré-Ing2 GC
10 janvier 2023
Durée 1,5 heures

Examen de mathématiques 2 : Fonctions de plusieurs variables

L'utilisation ou la consultation de téléphone est formellement interdite, les téléphones doivent être rangés dans un sac et éteints. Les documents sont interdits, une feuille A4 manuscrite est toutefois autorisée, ainsi qu'une calculatrice.
Barème indicatif : 4+5+5+6

Exercice 1: Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x+1)(x+2)}\,\mathrm{d}x$

Exercice 2: Soit φ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\varphi(0,0) = 0$ et pour tout $(x,y) \neq (0,0)$ par $\varphi(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+4y^2}$.

1. Calculer les dérivées partielles premières de φ en tout point (x,y) avec $(x,y) \neq (0,0)$.
2. Calculer les dérivées partielles premières de φ en $(0,0)$.
3. Montrer que φ n'est pas continue en $(0,0)$.
4. φ possède-t-elle un extremum local en $(0,0)$?

Exercice 3: Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2 + x\mathrm{e}^{xz} - x$

1. Calculer les dérivées partielles premières de φ.
2. Montrer que $(0,0,0)$ est un point critique.
3. Écrire un DL_2 de φ en $(0,0,0)$.
4. En déduire,sans utiliser le théorème du cours sur les extrema, que φ possède un minimum local strict en (0,0,0).

Exercice 4 (Cours): Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ telles que $f(2) = g(2) = 0$ et $h(t) = \varphi(f(t), g(t))$.

1. h est une fonction définie de quel ensemble dans quel ensemble ?
2. Rappeler la formule du DL_1 de φ en (x_0, y_0) en fonction des dérivées partielles de φ.
3. Écrire un DL_1 de f et g en 2.
4. Écrire le taux d'accroissement de h en 2.
5. Déduire des questions précédentes la formule donnant $h'(2)$ en fonction des dérivées et dérivées partielles de f, g et φ.
6. En utilisant un théorème du cours calculer $h''(2)$.
