L2-S3/PréIng2 GC
Janvier 2022
Durée 2,5 heures

Examen mathématiques de l'ingénieur 2

L'utilisation ou la consultation de téléphone est formellement interdite, les calculatrices et les téléphones doivent être rangés et <u>éteints</u>. Les documents sont interdits.
Barème indicatif : 4+5+7+4

Exercice 1 : Trigonométrie

Pour $x \in \mathbb{R}$, écrire $\cos(3x)$ comme une fonction de $\cos(x)$, c'est à dire déterminer une fonction f telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(3x) = f(\cos x)$

En particulier si $\cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, que vaut $\cos 3x$?

Exercice 1 : Intégration

1. Rappeler les primitives des fonctions définies par $\frac{1}{x+1}$, $\frac{1}{x^2+1}$, $\frac{x}{x^2+1}$.
2. En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{(x+1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2 : Fonction $\mathcal{C}^1$

Soit φ définie sur $\mathbb{R}^2$ par pour tout x, $\varphi(x,0) = 0$ et pour tout $y \neq 0$ par $\varphi(x,y) = y \sin\left(\frac{x}{y}\right)$.

1. Calculer les dérivées partielles premières de φ en tout point (x,y) avec $y \neq 0$.
2. Calculer les dérivées partielles secondes de φ en tout point (x,y) avec $y \neq 0$.
3. Calculer les dérivées partielles de φ en $(0,0)$.
4. Si φ était de classe $\mathcal{C}^1$ elle posséderait un DL_1 en $(0,0)$ de la forme
$$\varphi(x,y) = \varphi(0,0) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0;0)x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(0;0)y + \sqrt{x^2+y^2}\varepsilon(x,y)$$
Montrer que ce n'est pas le cas en considérant $\varphi(x,x)$.

Exercice 3 : Composée

Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, vérifiant

$$\varphi(4;1) = 1;\quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(4;1) = 0;\quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(4;1) = 0;\quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}(4;1) = 1;\quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}(4;1) = 7 \text{ et } \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1\,\partial x_2}(4;1) = 4$$

$$\varphi(1;1) = -1;\quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(1;1) = 3;\quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(1;1) = 1;\quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}(1;1) = 4;\quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}(1;1) = 2 \text{ et } \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1\,\partial x_2}(1;1) = 1$$

1. Écrire un DL_2 de φ en (4 ;1), écrire la Hessienne de φ en (4 ;1).
2. φ possède-t-elle un extremum local en (4 ;1) ?
3. On pose pour tout réel t, $f(t) = \varphi\big((1+t)^2, t\big)$, calculer $f'(t)$, puis $f''(t)$.
4. Calculer $f'(1)$ et $f''(1)$, f possède-t-elle un extremum local en 1 ?

Exercice 4 : Extrema

Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par Soit $\varphi(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2yz + 3xz^2$

1. Calculer les dérivées partielles de φ.
2. Montrer que $(0,0,0)$ est un point critique.
3. Déterminer la matrice Hessienne H de φ en $(0,0,0)$.
4. Déduire de la question précédente la nature locale (maximum, minimum ou point col) du point $(0,0,0)$.
5. Diagonaliser H dans une base orthonormale, redémontrer dans ce cas particulier, le résultat du cours sur la nature du point $(0,0,0)$.