

Exam de Math 1 - 2025/26.

Exo1: $SV = 5V$ donc $(SV)^t = (5V)^t$ donc $V^t S = 5V^t$ (car $S^t = S$)

1.2: $V^t S U = (V^t S) U = 5V^t U$ et $V^t S U = V^t (S U) = V^t 2U = 2V^t U$
donc $5V^t U = 2V^t U$ donc $3V^t U = 0$ donc $V^t U = 0$ donc $U \perp V$

1.3: $(A^t A)^t = A^t (A^t)^t = A^t A$ donc $A^t A$ est symétrique.

1.4: $x^t A^t A x = (Ax)^t (Ax) = \|Ax\|^2 \geq 0$ 1.5: si $Ax = \lambda x$ $x^t A^t A x = x^t \lambda x = \lambda \underbrace{x^t x}_{>0} \geq 0$ donc $\lambda \geq 0$

Exo2: $\det M = P_M(0) = 12 \neq 0$ donc M est inversible $P_M(x) = \det(M - xI)$

2.2: $\pi x = 2x \Leftrightarrow M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow 4x + 2y - 3z = 0$ E_2 est un plan vectoriel, une boue et constitué de 2 vecteurs Eibie de E_2 .

boue de E_2 : $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

2.4: $M = P D P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

2.3: $\vec{v}_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 9 \neq 0$ donc $E_3 \neq E_2^\perp$.

Exo3: $\pi^t = M$, M est symétrique, elle est donc diagonalisable.

3.2 $\text{tr } M = 4+4+5+5 = 18$ M est diagonalisable si il existe D diagonale et P inversible tq $\pi = P D P^{-1}$ avec sur la diagonale soit 3 soit 6 $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$ $\text{tr}(D) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = \text{tr}(M)$
pour être égal à 18 il doit y avoir 2 fois la valeur 3 et 2 fois la valeur 6.

3.3: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ on remarque que $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$ donc $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$

$(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ bon de E_3 avec $\vec{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. $E_6: \begin{cases} y = x + y \\ t = -x + y \end{cases}$

$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(\vec{v}_3, \vec{v}_4)$ est une boue de E_6 orthormalisons la avec G.S.

$\vec{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{e}_4 = \vec{v}_4 - \lambda \vec{e}_3$ $\vec{e}_4 \cdot \vec{e}_3 = 0 \Rightarrow \vec{v}_4 \cdot \vec{e}_3 - \lambda \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{\sqrt{6}} 3$

$\vec{e}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{3}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{f}_4 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & -1 & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Exo4: $(\alpha + \beta + \gamma) \vec{DH} = \alpha \vec{DA} + \beta \vec{DB} + \gamma \vec{DC} = \alpha \vec{DA} + \beta (\vec{DA} + \vec{AB}) + \gamma (\vec{DA} + \vec{AC}) = \vec{DA} + \beta \vec{AB} + \gamma \vec{AC}$.

4.2: $\vec{DH}$ est orthogonal au plan (ABC) donc orthogonal aux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$

4.3: $\begin{cases} \vec{DH} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{DH} \cdot \vec{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\vec{DA} + \beta \vec{AB} + \gamma \vec{AC}) \cdot \vec{AB} = 0 \\ (\vec{DA} + \beta \vec{AB} + \gamma \vec{AC}) \cdot \vec{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \vec{AB} \cdot \vec{AB} & \vec{AC} \cdot \vec{AB} \\ \vec{AB} \cdot \vec{AC} & \vec{AC} \cdot \vec{AC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \vec{DA} \cdot \vec{AB} \\ \vec{DA} \cdot \vec{AC} \end{pmatrix}$

4.4: $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\vec{AD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\pi = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \vec{AB} \cdot \vec{AB} & \vec{AC} \cdot \vec{AB} \\ \vec{AB} \cdot \vec{AC} & \vec{AC} \cdot \vec{AC} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -15 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} \vec{AB} \cdot \vec{AB} \\ \vec{AC} \cdot \vec{AB} \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -10 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$ $H = \text{boue}((A; 0); (B; -5); (C; 0))$