L2 GC (S3) - Pré-Ing2 GC
18 décembre 2025
Durée 1,5 heures

Examen de mathématiques 1

L'utilisation ou la consultation de téléphone est formellement interdite, les calculatrices, les téléphones et les objets connectés doivent être rangés dans un sac, éteints et déposés à l'avant de l'amphi : il est interdit d'en avoir un sur soi ou sur sa table. Les documents sont interdits.
Barème indicatif : 5+5+5+5

Exercice 1: Soit A une matrice carrée et S une matrice symétrique, U et V des matrices colonnes telles que U est un vecteur propre de S associé à la valeur propre 2, et V un vecteur propre de S associé à la valeur propre 5.

1. Que vaut V^tS ?
2. Calculer V^tSU et montrer que $U \perp V$.
3. Montrer que A^tA est une matrice symétrique.
4. Montrer que A^tA est une matrice symétrique positive, c'est à dire que pour toute matrice colonne X, $X^tA^tAX \geqslant 0$.
5. En déduire que toutes les valeurs propres de A^tA sont positives.

Exercice 2: Soit $M = \begin{pmatrix} 10 & 4 & -6 \\ 4 & 4 & -3 \\ 12 & 6 & -7 \end{pmatrix}$ une matrice dont le polynôme caractéristique $P_M(X) = -(X-2)^2(X-3)$.

1. M est-elle inversible ?
2. Déterminer une base de E_3 et une équation de E_2.
3. A-t-on $E_3 = E_2^{\perp}$?
4. Diagonaliser M.

Exercice 3: Soit $M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 5 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, on admet que les valeurs propres de M sont 3 et 6.

1. M est-elle diagonalisable ?
2. Calculer $\mathrm{tr}(M)$, en déduire les dimensions de E_3 et E_6.
3. Sachant que $E_3 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et que $E_6 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / -x-y-z = 0 \text{ et } -x+y-t = 0\}$

   Déterminer P orthogonale telle que $M = P \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} P^{-1}$

Exercice 4: Soit A, B, C, trois points non alignés de l'espace, et D un point de l'espace, on note H le projeté orthogonal de D sur la plan (ABC). On cherche à écrire H comme barycentre de A, B et C, on cherche des coefficients a, b, c tels que $H = \mathrm{Bar}\big((A,a),(B,b),(M,c)\big)$ et $a+b+c=1$.

1. Montrer que $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{DA} + b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$.
2. On note $M = \begin{pmatrix} \|\overrightarrow{AB}\|^2 & \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} & \|\overrightarrow{AC}\|^2 \end{pmatrix}$, montrer que $M\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} \end{pmatrix}$
3. Application, écrire le projeté orthogonal de D sur (ABC), comme barycentre de A, B et C, pour

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} ; C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; D = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} ;$$