2024-2025
Licence 2 Génie Civil
Algèbre

Correction Examen – Session 1
Le 17 décembre 2024
Durée : 2h00

Exercice 1 **(4 points = 0,5 + 1 + 0,5 + 1 + 1)**

Soit ABC un triangle quelconque du plan. Les points I et G sont définis par : $\overrightarrow{AI} = -2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CG} = \frac{1}{5}\overrightarrow{CI}$

1. **a.** Exprimer le point I comme barycentre des points A et B.

$$\overrightarrow{AI} = -2\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{AI} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$
$$\overrightarrow{AI} + 2\overrightarrow{AI} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$$
$$\boxed{3\overrightarrow{AI} - 2\overrightarrow{BI} = \vec{0}}$$

Donc : $\boxed{I = bar\{(A,3);(B,-2)\}}$ puisque $3 - 2 = 1 \neq 0$

b. Exprimer le point G comme barycentre des points A, B et C.

$$\overrightarrow{CG} = \frac{1}{5}\overrightarrow{CI}$$
$$\overrightarrow{CI} = 5\overrightarrow{CG}$$
$$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AI} = 5\overrightarrow{CG}$$
$$\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{AB} = 5\overrightarrow{CG}$$
$$\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GA} - 2\left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB}\right) = 5\overrightarrow{CG}$$
$$\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{AG} - 2\overrightarrow{GB} = 5\overrightarrow{CG}$$
$$-4\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$
$$\boxed{3\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} + 4\overrightarrow{GA} = \vec{0}}$$

Donc : $\boxed{G = bar\{(A,3);(B,-2);(C,4)\}}$ puisque $3 - 2 + 4 = 5 \neq 0$

2. Soit J le barycentre du système $\{(A,3);(C,4)\}$.

a. Justifier que *J* est le point d'intersection de la droite (*BG*) et du segment [*AC*].

Comme J est le barycentre du système $\{(A,3);(C,4)\}$ alors J appartient à la droite (AC).
De plus, les coefficients des points A et C sont positifs donc J appartient au segment [AC].
On a : $G = bar\{(A,3);(B,-2);(C,4)\}$ or $J = bar\{(A,3);(C,4)\}$
D'après le théorème du barycentre partiel, on a : $G = bar\{(J,7);(B,-2)\}$
Cela implique que G, J et B sont alignés donc que J appartient à la droite (BG).

Conclusion : ***J*** est le point d'intersection de la droite (BG) et du segment [AC].

b. Déterminer la position du point *J* sur [*AC*].

On a : $J = bar\{(A,3);(C,4)\}$ Donc $\overrightarrow{AJ} = \frac{4}{3+4}\overrightarrow{AC}$; $\boxed{\overrightarrow{AJ} = \frac{4}{7}\overrightarrow{AC}}$

3. Déterminer l'ensemble Γ des points *M* du plan tels que : $\left\| 3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} \right\| = \left\| \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MI} \right\|$.

I est le barycentre des points (A,– 3) et (B,– 2).

D'après le théorème de réduction, pour tout point M du plan, on a : et $3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI}$

Pour tout point *M* du plan, $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{IA}$

Donc $\left\| 3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} \right\| = \left\| \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MI} \right\|$ équivaut à $\left\| \overrightarrow{MI} \right\| = \left\| \overrightarrow{IA} \right\|$

équivaut à $IM = IA$

équivaut à *M* appartient au cercle de centre *I* passant par *A*.

On en conclut que Γ est le cercle de centre *I* et de rayon *A*.

Exercice 2 (8 points = 1 + 2 + 4 + 1)

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Justifier, sans faire de calculs, que la matrice *A* est diagonalisable.

A étant une matrice réelle symétrique puisque ${}^tA = A$ alors on peut affirmer d'après le théorème spectral que *A* est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

2. Calculer le polynôme caractéristique $P_A(x)$ et en déduire que les valeurs propres de *A* sont – 2 et 7.

$$P_A(x) = \det\left(A - xI_3\right) = \begin{vmatrix} 3-x & -2 & 4 \\ -2 & 6-x & 2 \\ 4 & 2 & 3-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7-x & 0 & 7-x \\ -2 & 6-x & 2 \\ 4 & 2 & 3-x \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + L_3)$$

$$P_A(x) = (7-x)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 6-x & 2 \\ 4 & 2 & 3-x \end{vmatrix} = (7-x)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 6-x & 4 \\ 4 & 2 & -1-x \end{vmatrix} \quad C_3 \leftarrow C_3 - C_1$$

$$P_A(x) = (7-x)\left[(6-x)(-1-x) - 8\right]$$

$$P_A(x) = (7-x)\left[(x-6)(x+1) - 8\right]$$

$$P_A(x) = (7-x)\left(x^2 + x - 6x - 6 - 8\right)$$

$$P_A(x) = (7-x)\left(x^2 - 5x - 14\right)$$

Factorisons le trinôme $x^2 - 5x - 14$: Son discriminant est $\Delta = 81 = 9^2 > 0$ et ses racines sont : – 2 et 7.

D'où

$$P_A(x) = (7-x)(x+2)(x-7)$$

$$\boxed{P_A(x) = -(x+2)(x-7)^2}$$

Conclusion : Les racines de P_A sont -2 et 7 donc les valeurs propres de A sont **– 2 et 7.**

3. Déterminer une base orthonormée de vecteurs propres de *A*.

Notons $E_{-2} = \ker\left(A+2I_3\right)$ le sous-espace propre associé à la valeur propre – 2,

et $E_7 = \ker(A-7I_3)$ le sous-espace propre associé à la valeur propre 7.

La matrice *A* étant symétrique, les sous-espaces propres E_{-2} et E_7 sont orthogonaux.

<u>Déterminons une base orthonormée du sous-espace propre E_7 :</u> Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ où x, y, z sont des réels.

$$X \in E_7 \Leftrightarrow AX = 7X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y+4z=7x \\ -2x+6y+2z=7y \\ 4x+2y+3z=7z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x-2y+4z=0 \\ -2x-y+2z=0 \\ 4x+2y-4z=0 \end{cases}$$

$$X \in E_7 \Leftrightarrow 2x+y-2z=0 \Leftrightarrow y=-2x+2z$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_7 \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ -2x+2z \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow X = x\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{E_7 = \left\{x\left(1,-2,0\right)+z\left(0,2,1\right) / x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\right\}}$$

Posons $v_1 = \left(1,-2,0\right)$ et $v_2 = \left(0,2,1\right)$: la famille $\left\{v_1;v_2\right\}$ est génératrice de E_7 et libre puisque les vecteurs ne sont pas colinéaires. $\left\{v_1;v_2\right\}$ est une base de E_7.

Utilisons **le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt** pour transformer la base $\left(v_1,v_2\right)$ en une base orthonormée. Notons $\|\ \|$ la norme associée au produit scalaire canonique.

Posons $u_1 = v_1$ et $u_2 = v_2 - \dfrac{\langle v_2 | u_1 \rangle}{\| u_1 \|^2} u_1$

On a : $\langle v_2 | u_1 \rangle = 0-4+0 = -4$ et $\| u_1 \|^2 = 1^2 + (-2)^2 + 0^2 = 5$

D'où : $u_2 = \left(0,2,1\right) - \dfrac{-4}{5}\left(1,-2,0\right)$; $\boxed{u_2 = \left(\dfrac{4}{5},\dfrac{2}{5},1\right) = \dfrac{1}{5}\left(4,2,5\right)}$

On normalise chacun des vecteurs : $w_1 = \dfrac{u_1}{\| u_1 \|}$; $\boxed{w_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(1,-2,0\right)}$

Comme $\| u_2 \| = \dfrac{1}{5}\sqrt{4^2+2^2+5^2} = \dfrac{1}{5}\sqrt{45} = \dfrac{1}{5}\times 3\sqrt{5} = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$ alors $w_2 = \dfrac{u_2}{\| u_2 \|}$ d'où : $\boxed{w_2 = \dfrac{1}{3\sqrt{5}}\left(4,2,5\right)}$

La base $B_1 = \left(w_1, w_2\right)$ est une base orthonormée du sous-espace propre associé à la valeur propre 7.

Déterminons une base orthonormée du sous-espace propre E_{-2} : Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ où x,y,z sont des réels.

$$X\in E_{-2}\Leftrightarrow AX=-2X\Leftrightarrow\begin{pmatrix}3&-2&4\\-2&6&2\\4&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-2y+4z=-2x\\-2x+6y+2z=-2y\\4x+2y+3z=-2z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x-2y+4z=0\\-2x+8y+2z=0\\4x+2y+5z=0\end{cases}$$

$$X\in E_{-2}\Leftrightarrow\begin{cases}5x-2y+4z=0\\x-4y-z=0\\4x+2y+5z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-4y-z=0\\5x-2y+4z=0\\4x+2y+5z=0\end{cases}L_2\leftrightarrow L_1\Leftrightarrow\begin{cases}x-4y-z=0\\18y+9z=0 & L_2\leftarrow L_2-5L_1\\18y+9z=0 & L_3\leftarrow L_3-4L_1\end{cases}$$

$$X\in E_{-2}\Leftrightarrow\begin{cases}x-4y-z=0\\z=-2y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2y\\z=-2y\end{cases}$$

$$\boxed{E_{-2}=\{(2y,y,-2y)/\,y\in\mathbb{R}\}=\{y(2,1,-2)/\,y\in\mathbb{R}\}}$$

Posons $v_3=(2,1,-2)\neq O_{\mathbb{R}^3}$: la famille $\{v_3\}$ est génératrice et libre de E_{-2} donc $\{v_3\}$ est une base de E_{-2}.

Normalisons le vecteur : $w_3=\dfrac{v_3}{\|v_3\|}$; $w_3=\dfrac{1}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}(2,1,-2)$; $\boxed{w_3=\dfrac{1}{3}(2,1,-2)}$

$B_2=(w_3)$ est une base orthonormée de E_{-2}.

Conclusion : Les sous-espaces propres étant orthogonaux, on en déduit que l'union des bases B_1 et B_2 constitue une base orthonormée *B* de vecteurs propres de *A*. $B=(w_1,w_2,w_3)$.

4. **En déduire les matrices *P* et *D* telles que *D* est diagonale, *P* est orthogonale et $D={}^tPAP$.**

$$D=\begin{pmatrix}7&0&0\\0&7&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}&\frac{4}{3\sqrt5}&\frac{2}{3}\\-\frac{2}{\sqrt5}&\frac{2}{3\sqrt5}&\frac{1}{3}\\0&\frac{5}{3\sqrt5}&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

Exercice 3 **(5 points = 2 + 1,5 + 1,5)**

Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par : $F = Vect(v_1, v_2)$ où $v_1 = (1,0,-1)$ et $v_2 = (2,1,0)$

1. **Déterminer une base orthonormée de *F*.**

La famille $\{v_1 ; v_2\}$ génératrice de F est libre puisque les vecteurs v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires étant donné que leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles. $\{v_1 ; v_2\}$ est donc une base de F.

Utilisons **le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt** pour transformer la base (v_1, v_2) en une base orthonormée. Notons $\| \ \|$ la norme associée au produit scalaire canonique.

Posons $u_1 = v_1$ et $u_2 = v_2 - \dfrac{\langle v_2 | u_1 \rangle}{\| u_1 \|^2} u_1$

On a : $\langle v_2 | u_1 \rangle = 2 + 0 + 0 = 2$ et $\| u_1 \|^2 = 1^2 + 0^2 + (-1)^2 = 2$

D'où :
$$u_2 = (2,1,0) - \frac{2}{2}(1,0,-1)$$
$$u_2 = (2,1,0) - (1,0,-1) \quad ; \quad \boxed{u_2 = (1,1,1)}$$

On normalise chacun des vecteurs : $w_1 = \dfrac{u_1}{\| u_1 \|}$; $\boxed{w_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)}$

Comme $\| u_2 \| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$ alors $w_2 = \dfrac{u_2}{\| u_2 \|}$ d'où : $\boxed{w_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)}$

La base $B_1 = (w_1, w_2)$ est une base orthonormée du sous-espace vectoriel F.

2. **Calculer la projection orthogonale $p_F(v)$ de $v = (2,-1,4)$ sur *F*.**

$$p_F(v) = \langle v | w_1 \rangle w_1 + \langle v | w_2 \rangle w_2$$

$$p_F(v) = \frac{2+0-4}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{2-1+4}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$p_F(v) = \frac{-2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{5}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$p_F(v) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{5}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$p_F(v) = \begin{pmatrix} -1 + \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 1 + \frac{5}{3} \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \boxed{p_F(v) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}}$$

3. En déduire la distance entre v et F.

$$d(v,F) = \| v - p_F(v) \|$$
$$d(v,F) = \sqrt{\| v \|^2 - \| p_F(v) \|^2}$$

or $\| v \|^2 = 2^2 + (-1)^2 + 4^2$ et $\| p_F(v) \|^2 = \frac{1}{9}\left(2^2 + 5^2 + 8^2\right)$

$\| v \|^2 = 4 + 1 + 16$ $\qquad$ $\| p_F(v) \|^2 = \frac{1}{9}\left(4 + 25 + 64\right)$

$\| v \|^2 = 21$ $\qquad$ $\| p_F(v) \|^2 = \frac{93}{9} = \frac{31}{3}$

Donc $d(v,F) = \sqrt{21 - \frac{31}{3}}$

$$d(v,F) = \sqrt{\frac{63}{3} - \frac{31}{3}}$$

$$\boxed{d(v,F) = \sqrt{\frac{32}{3}}}$$

Exercice 4 **(3 points = Partie A : 0,5 ; Partie B : 1 + 0,5 + 1)**

Partie A La matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, de la rotation d'angle de mesure $\frac{\pi}{6}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Partie B Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice : $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que f est une isométrie.

f est une isométrie si et seulement si ${}^tAA = I_3$

$${}^tAA = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \times \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$${}^tAA = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 4+36+9 & -12+18-6 & 6+12-18 \\ -12+18-6 & 36+9+4 & -18+6+12 \\ 6+12-18 & -18+6+12 & 9+4+36 \end{pmatrix} = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 49 & 0 & 0 \\ 0 & 49 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{{}^tAA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3}$$

Conclusion : Comme ${}^tAA = I_3$ alors f est une isométrie.

2. On admet que $\det A = -1$**. Justifier que** $\boldsymbol{f}$ **est une réflexion.**

$$tr\ A = \frac{1}{7}(-2+3+6)$$

$$tr\ A = \frac{1}{7}\times 7$$

$$\boxed{tr\ A = 1}$$

Puisque f est une isométrie, que $\det A = -1$ **et** $tr\ A = 1$ alors $\boldsymbol{f}$ **est une réflexion.**

3. Déterminer une équation du plan de la réflexion.

$$X \in E_1 \Leftrightarrow AX = X \Leftrightarrow \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix} v \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+6y-3z = 7x \\ 6x+3y+2z = 7y \\ -3x+2y+6z = 7z \end{cases}$$

$$X \in E_1 \Leftrightarrow \begin{cases} -9x+6y-3z = 0 \\ 6x-4y+2z = 0 \\ -3x+2y-z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y+z = 0 \\ 3x-2y+z = 0 \\ 3x-2y+z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3x-2y+z = 0$$

Conclusion : Une équation du plan de la réflexion est $3x-2y+z=0$.