2024-2025
Licence 2 Génie Civil
Algèbre

Examen – Session 1
Le 17 décembre 2024
Durée : 2h00

Les calculatrices, les téléphones et les objets connectés doivent être rangés dans un sac et **éteints.**
Les documents sont interdits.
Chaque réponse doit être justifiée.
La rigueur, la clarté de la rédaction et la qualité de la présentation entrent en ligne de compte dans la notation.
(*Le barème est donné à titre indicatif*)

Exercice 1 **(4 points = 0,5 + 1 + 1 + 0,5 + 1)**

Soit ABC un triangle quelconque du plan. Les points I et G sont définis par : $\overrightarrow{AI} = -2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CG} = \frac{1}{5}\overrightarrow{CI}$

1. **a.** Exprimer le point I comme barycentre des points A et B.
   b. Exprimer le point G comme barycentre des points A, B et C.
2. Soit J le barycentre du système $\{(A,3);(C,4)\}$.
   a. Justifier que J est le point d'intersection de la droite (BG) et du segment $[AC]$.
   b. Déterminer la position du point J sur $[AC]$.
3. Déterminer l'ensemble Γ des points M du plan tels que : $\left\| 3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} \right\| = \left\| \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MI} \right\|$.

Exercice 2 **(8 points = 1 + 2 + 4 + 1)**

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Justifier, sans faire de calculs, que la matrice A est diagonalisable.
2. Calculer le polynôme caractéristique $P_A(x)$ et en déduire que les valeurs propres de A sont -2 et 7.
3. Déterminer une base orthonormée de vecteurs propres de A.
4. En déduire les matrices P et D telles que D est diagonale, P est orthogonale et $D = {}^tPAP$.

Exercice 3 **(5 points = 2 + 1,5 + 1,5)**

Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par : $F = Vect(v_1, v_2)$ où $v_1 = (1,0,-1)$ et $v_2 = (2,1,0)$

1. Déterminer une base orthonormée de F.
2. Calculer la projection orthogonale $p_F(v)$ de $v = (2,-1,4)$ sur F.
3. En déduire la distance entre v et F.

Exercice 4 **(3 points = Partie A : 0,5 ; Partie B : 1 + 0,5 + 1)**

Partie A Déterminer la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, de la rotation d'angle de mesure $\frac{\pi}{6}$.

Partie B Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice : $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que f est une isométrie.
2. On admet que $\det A = -1$. Justifier que f est une réflexion.
3. Déterminer une équation du plan de la réflexion.