2023-2024
Licence 2 Génie Civil
Algèbre

Examen – Session 1
Le 19 décembre 2023
Durée : 2h00

Chaque réponse doit être justifiée.
La rigueur, la clarté de la rédaction et la qualité de la présentation entrent en ligne de compte dans la notation.
(*Le barème est donné à titre indicatif*)

Exercice 1 (3 points = 1,5 + 1,5)

Dans le repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan, on considère les points :

$$A(-2;1),\quad B(2;-3),\quad C(4;3).$$

1. Calculer les coordonnées cartésiennes du barycentre G du système suivant : $\left\{(A,3);(B,1);(C,-2)\right\}$.
2. Déterminer l'ensemble Γ des points M du plan tels que : $\left\|3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right\|$.

Exercice 2 (8 points = 1 + 2 + 4 + 1)

Soit

$$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$$

1. Justifier, sans faire de calculs, que la matrice A est diagonalisable.
2. Calculer le polynôme caractéristique $P_A(x)$ et en déduire que les valeurs propres de A sont 1 et 4.
3. Déterminer une base orthonormée de vecteurs propres de A.
4. En déduire les matrices P et D telles que D est diagonale, P est orthogonale et $D={}^tPAP$.

Exercice 3 (5 points = 2 + 1,5 + 1,5)

Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par : $F=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-y+2z=0\right\}$

1. Déterminer une base orthonormée de F.
2. Calculer la projection orthogonale $p_F(v)$ de $v=(-1,-3,5)$ sur F.
3. En déduire la distance entre v et F.

Exercice 4 (4 points = Partie A : 1 ; Partie B : 0,5 + 1,5 + 1)

Partie A Déterminer la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, de l'isométrie suivante :
la symétrie par rapport à la droite D d'équation $x-3y=0$.

Partie B Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice : $A=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&2\\2&2&-1\\-1&2&2\end{pmatrix}$.

On admet que f est une isométrie.

1. Démontrer que f est une rotation.
2. Déterminer l'axe de la rotation.
3. Déterminer l'angle θ de la rotation. (On admet que $\sin\theta>0$).