2022-2023
Licence 2 Génie civil
Algèbre

Examen (correction)

le 12 janvier 2023

Exercice 1. (**3 pt**)
On considère les points suivants du plan :

$$A(1;2), \quad B(3;-2), \quad C(4;5).$$

On considère les poids suivants $m_A = 7$, $m_B = -3$, $m_C = -5$.
(1,5 pt) a) **Calculer les coordonnées cartésiennes du barycentre G du système (A, m_A), (B, m_B), (C, m_C).**
(1,5 pt) b) **Soit A_1 le point d'intersection des droites AG et BC. Calculer $\frac{BA_1}{A_1C}$.**

a) On cherche les coordonnées (X, Y) de G. On a

$$m_A\overrightarrow{GA} + m_B\overrightarrow{GB} + m_C\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}.$$

Cela donne

$$7(1-X, 2-Y) - 3(3-X, -2-Y) - 5(4-X, 5-Y) = (0,0).$$

Après la simplification cela donne $(-22+X, -5+Y) = (0,0)$, d'où $X = 22$ et $Y = 5$. Donc les coordonnées de G sont $(22, 5)$.

b) On a vu en TD que dans cette situation A_1 doit être le barycentre du système (B, m_B), (C, m_C). Les poids m_B et m_C sont de même signe, donc A_1 se trouve entre B et C. On obtient donc $m_B \cdot BA_1 = m_C \cdot A_1C$, d'où $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{m_C}{m_B} = \frac{5}{3}$.

Exercice 2. (**7,5 pt**)

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(1,5 pt) $a)$ **Calculer** $\chi_A(x)$.

(1,5 pt) $b)$ **Factoriser** $\chi_A(x)$. **En déduire que les valeurs propres de** A **sont** 2 **et** 5.

(3 pt) $c)$ **Diagonaliser la matrice** A **dans une base orthonormée. Donner** P **et** D **telles que** D **est diagonale,** P **est orthogonale et** $A = P \cdot D \cdot {}^tP$.

(1,5 pt) $d)$ **Soient** $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ **et** $F = E_2$ **(l'espace propre associé à la valeur propre** 2**).**

Calculer $\mathrm{pr}_F(v)$.

$a)$ On a $\chi_A(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, où

$$a_2 = -\mathrm{tr}(A) = -(3+3+3) = -9,$$

$$a_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 8 + 8 + 8 = 24,$$

$$a_0 = -\det(A) = -\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & -8 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -(4{+}16) = -20.$$

On obtient donc $\chi_A(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$.

$b)$ $x = 2$ est clairement une racine du polynôme $\chi_A(x)$. Donc on doit avoir un facteur $x - 2$. En effectuant la division de $\chi_A(x)$ par $x - 2$ on otient la factorisation $\chi_A(x) = (x-2)(x^2+7x+10)$. Or $x^2 - 7x + 10 = (x-2)(x-5)$, on obtient $\chi_A(x) = (x-2)^2(x-5)$. Donc les valeurs propres sont 2 et 5.

$c)$ On a $\dim E_2 = \mathrm{mg}_2 = \mathrm{ma}_2 = 2$, donc E_2 est un plan. On a aussi $\dim E_5 = \mathrm{mg}_5 = \mathrm{ma}_5 = 1$, donc E_5 est une droite.

$\underline{\lambda = 2}$

On a

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Leftrightarrow \quad -x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

On pose $x_2 = t$, $x_3 = s$, d'où $x_1 = t - s$. On obtient

$$E_0 = \left\{ \begin{pmatrix} t-s \\ t \\ s \end{pmatrix}, t, s \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Donc les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base de E_2.

On applique Gram-Schmidt pour obtenir une base orthonormée de E_2 :

$$\begin{array}{lclcl}
v_1' & = & v_1 & = & (1,1,0) \\
v_2' & = & v_2 - \frac{(v_2,v_1')}{(v_1',v_1')}v_1' & = & (-1,0,1) + \frac{1}{2}(1,1,0) = \frac{1}{2}(-1,1,2) \\
 & & & & \\
v_1'' & = & \frac{1}{||v_1'||}v_1' & = & \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) \\
 & & & & \\
v_2'' & = & \frac{1}{||v_2'||}v_2' & = & \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)
\end{array}$$

Les vecteurs v_1'' et v_2'' forment une base orthonormée de E_2.

$\underline{\lambda = 5}$

On a $E_5 = (E_2)^{\perp}$. Donc le vecteur $v_3 = (-1,1,-1)$ est une base de E_5 (c'est un vecteur normal au plan E_2 qui a l'équation $-x_1 + x_2 - x_3 = 0$). Le vecteur $v_3'' = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,-1)$ forme une base orthonormée de E_5.

Finalement, on obtient $A = P \cdot D \cdot {}^tP$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

et

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

d)

Méthode 1.

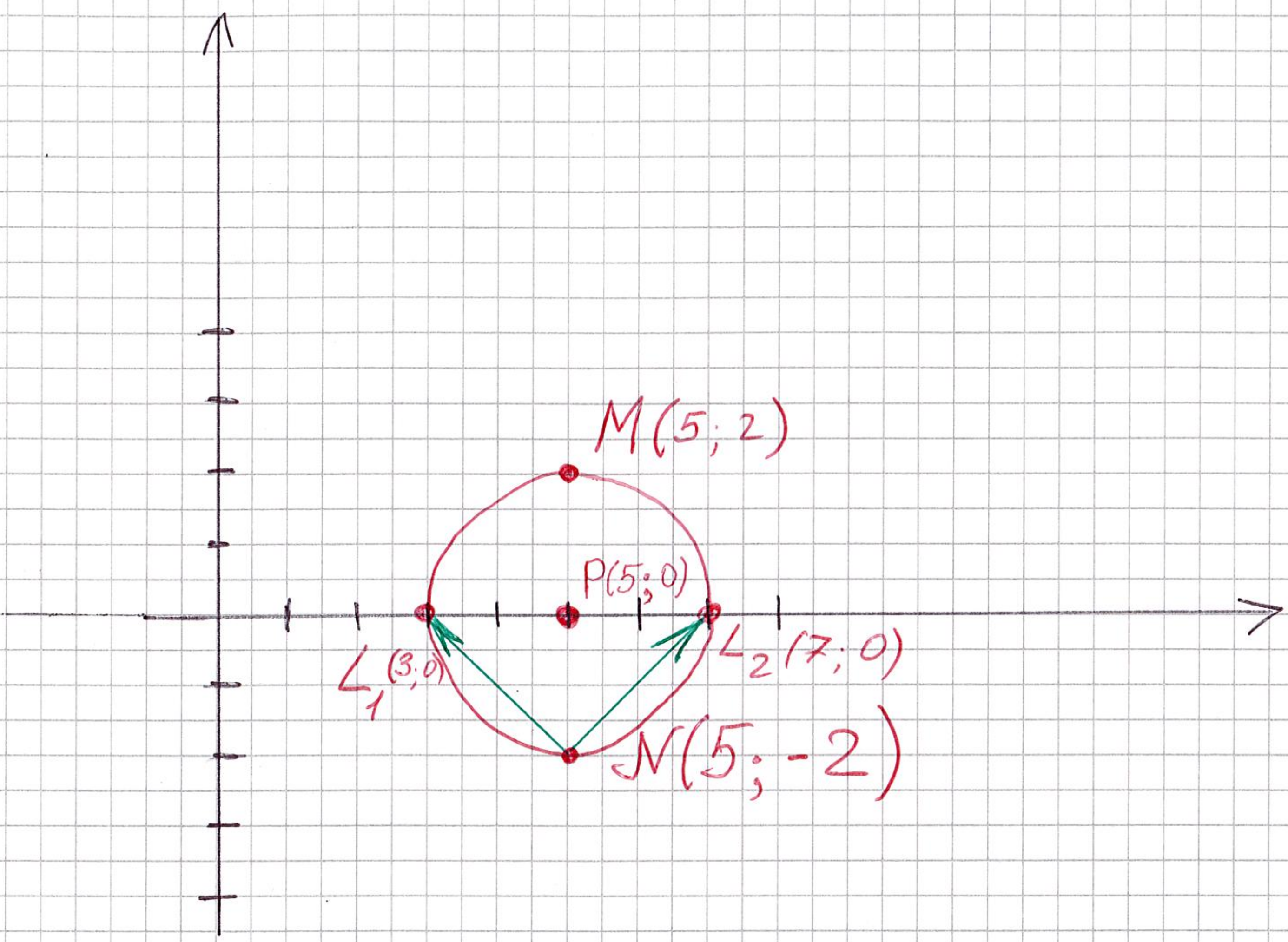
On a

$$\mathrm{pr}_F(v) = (v,v_1'')v_1'' + (v,v_2'')v_2'' = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) + \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)$$

$$= (3/2, 3/2, 0) + (-1/2, 1/2, 1) = (1,2,1).$$

Méthode 2.

$$\mathrm{pr}_F(v) = v - \mathrm{pr}_{F^{\perp}}(v) = v - \mathrm{pr}_{v_3}(v) = v - \frac{(v_3,v)}{(v_3,v_3)}v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{-3}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



M(5; 2)
P(5; 0)
L1(3;0)
L2(7; 0)
N(5; -2)

Exercice 3. (**7 pt**)

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

(0,5 pt) a) **Dire** <u>**sans faire de calculs**</u> **(mais avec justification !) si** A **est diagonalisable.**

(2 pt) b) **Tracer le cercle de Mohr pour** A**. En déduire** <u>**graphiquement**</u> **les valeurs propre et une base de vecteurs propres.**

(2 pt) c) **Recalculer** <u>**algébriquement**</u> **les valeurs propres et une base de vecteurs propres.**

(0,5 pt) d) **Expliquer pourquoi la réponse de** c) **est cohérente avec la réponse de** b)**.**

(2 pt) e) **Calculer la puissance** A^{80}**.**

a) La matrice A est symétrique, donc diagonalisable.

b) On a $M(5,2)$ et $N(5,-2)$. Le cercle de Mohr est le cercle de diamètre MN. Le centre du cercle a les coordonnées $(5,0)$ et le rayon est égal à 2. Les points d'intersection L_1 et L_2 du cercle avec l'axe Ox ont des abscisses $5 \pm 2 = 3$ et 7. Donc $L_1(3,0)$, $L_2(7,0)$. Donc les valeurs propes sont 3 et 7. Les vecteurs propres associés à ces valeurs propes sont $\overrightarrow{NL_1} = (3,0) - (5,-2) = (-2,2)$ et $\overrightarrow{NL_2} = (7,0) - (5,-2) = (2,2)$. Donc les vecteurs $(-2,2)$ et $(2,2)$ forment une base de vecteurs propres.

c) On a $\chi_A(x) = x^2 - \mathrm{tr}(A)x + \det(A) = x^2 - 10x + 21 = (x-3)(x-7)$. Donc les valeurs propres sont 3 et 7.

<u>$\lambda = 3$</u>

On a

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Leftrightarrow \quad 2x_1 + 2x_2 = 0$$

On pose $x_2 = t$, on trouve $x_1 = -x_2 = -t$. On obtient

$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Donc le vecteur $(-1,1)$ est une base de E_3

<u>$\lambda = 7$</u>

On a $E_7 = (E_3)^\perp$. Donc le vecteur $(2,2)$ est une base de E_7 (c'est un vecteur normal au plan E_3 qui a l'équation $2x_1 + 2x_2 = 0$).

Donc les vecteurs $(-1,1)$ et $(2,2)$ forment une base de vecteurs propres.

d) On observe une petite différence : on a $(-2,2)$ dans b) mais $(-1,1)$ dans c).

C'est normal parce que les vecteurs $(-2,2)$ et $(-1,1)$ sont proportionnelles.

e) On a $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$.

On a

$$D^{80} = \begin{pmatrix} 3^{80} & 0 \\ 0 & 7^{80} \end{pmatrix},$$

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On a donc

$$A^{80} = PA^{80}P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3^{80} & 0 \\ 0 & 7^{80} \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3^{80} & 7^{80} \\ 3^{80} & 7^{80} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^{80}+7^{80} & -3^{80}+7^{80} \\ -3^{80}+7^{80} & 3^{80}+7^{80} \end{pmatrix}$$

Exercice 4. (**2,5 pt**)

On admet que l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par la matrice

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

(dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$) est une isométrie.

(1,5 pt) *a*) **Démontrer que c'est une réflexion.**

(1 pt) *b*) **Donner l'équation du plan de réflexion.**

a) On a

$$\det(A) = \frac{1}{3^3}\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{27}\begin{vmatrix} 0 & 3 & -6 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & -6 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{27}\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = \frac{-27}{27} = -1$$

et

$$\mathrm{tr}(A) = \frac{1}{3}(2+2-1) = 1.$$

Donc A représente une réflexion.

b) Le plan de réflexion est E_1. On a

$$1 \cdot \mathrm{Id} - A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Les 3 lignes de cette matrice sont proportionnelles. On peut prendre par exemple la première ligne (on peut supprimer le facteur 1/3) pour obtenir l'équation de E_1 :

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 0.$$