

Examen

le 12 janvier 2023

Chaque réponse doit être justifiée

Durée : 2h

2 pages

Exercice 1. (3 pt)

On considère les points suivants du plan :

$$A(1; 2), \quad B(3; -2), \quad C(4; 5).$$

On considère les poids suivants $m_A = 7$, $m_B = -3$, $m_C = -5$.

(1,5 pt) a) Calculer les coordonnées cartésiennes du barycentre G du système (A, m_A) , (B, m_B) , (C, m_C) .

(1,5 pt) b) Soit A_1 le point d'intersection des droites AG et BC . Calculer $\frac{BA_1}{A_1C}$.

Exercice 2. (7,5 pt) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(1,5 pt) a) Calculer $\chi_A(x)$.

(1,5 pt) b) Factoriser $\chi_A(x)$. En déduire que les valeurs propres de A sont 2 et 5.

(3 pt) c) Diagonaliser la matrice A dans une base orthonormée. Donner P et D telles que D est diagonale, P est orthogonale et $A = P \cdot D \cdot {}^tP$.

(1,5 pt) d) Soient $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $F = E_2$ (l'espace propre associé à la valeur propre 2).

Calculer $\text{pr}_F(v)$.

Exercice 3. (7 pt) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

(0,5 pt) a) Dire sans faire de calculs (mais avec justification!) si A est diagonalisable.

(2 pt) b) Tracer le cercle de Mohr pour A . En déduire graphiquement les valeurs propre et une base de vecteurs propres.

(2 pt) c) Recalculer algébriquement les valeurs propres et une base de vecteurs propres.

(0,5 pt) d) Expliquer pourquoi la réponse de c) est cohérente avec la réponse de b).

(2 pt) e) Calculer la puissance A^{80} .

Tournez la page, s'il vous plaît

Exercice 4. (2,5 pt)

On admet que l'application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 définie par la matrice

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

(dans la base canonique de \mathbb{R}^3) est une isométrie.

(1,5 pt) *a)* Démontrer que c'est une réflexion.

(1 pt) *b)* Donner l'équation du plan de réflexion.