2021-2022
Licence 2 Génie civil
Algèbre

Examen, session 2 (correction)

le 16 juin 2022

Exercice 1. (3,5 pt)

Soient A et C deux points. Soit B le point sur le segment AC tel que $2AB = BC$.

(1,5 pt) $a)$ **Quels poids m_A, m_C faut-il mettre en A et C tels que B soit le barycentre du système (A, m_A), (C, m_C) ?**

(2 pt) $b)$ **Quels poids p_A, p_B faut-il mettre en A et B tels que C soit le barycentre du système (A, p_A), (B, p_B) ?**

$a)$ On veut avoir $m_A \cdot AB = m_C \cdot BC$. On peut donc prendre par exemple $m_A = 2$ et $m_C = 1$.

$b)$ On veut avoir $p_A \cdot \overrightarrow{CA} + p_B \cdot \overrightarrow{CB} = \vec{0}$.

On pose $\vec{a} = \overrightarrow{BA}$. Dans ce cas on a $\overrightarrow{CB} = 2\vec{a}$ et $\overrightarrow{CA} = 3\vec{a}$.

Donc

$$p_A \cdot \overrightarrow{CA} + p_B \cdot \overrightarrow{CB} = \vec{0} \qquad \Leftrightarrow \qquad p_A \cdot 3\vec{a} + p_B \cdot 2\vec{a} = \vec{0}.$$

On peut prendre par exemple $p_A = 2$ et $p_B = -3$.

Exercice 3. (5,5 pt)

Soit $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2) \subset \mathbb{R}^3$, où $v_1 = (1, 1, 0)$ et $v_2 = (2, 2, 2)$.

(2 pt) $a)$ **Trouver une base <u>orthonormée</u> de F.**

(2 pt) $b)$ **Calculer la projection $\mathrm{pr}_F(v)$, où $v = (1, 3, 5)$.**

(1,5 pt) $c)$ **Trouver une base de $F^\perp$.**

$a)$ Les deux vecteurs v_1 et v_2 forment une base de F (parce que v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires). Cette base n'est pas orthonormée. Pour obtenir une base orthonormée, on applique Gram-Schmidt.

$$\begin{array}{rcllcl}
v_1' & = & v_1 & & = & (1,1,0) \\
v_2' & = & v_2 - \frac{(v_2, v_1')}{(v_1', v_1')} v_1' & & = & (2,2,2) - \frac{4}{2}(1,1,0) = (0,0,2) \\
v_1'' & = & \frac{1}{||v_1'||} v_1' & & = & \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) \\
v_2'' & = & \frac{1}{||v_2'||} v_2' & & = & \frac{1}{2}(0,0,2) = (0,0,1)
\end{array}$$

La base (v_1'', v_2'') est orthonormée.

b)

$$\mathrm{pr}_F(v) = (v, v_1'')v_1'' + (v, v_2'')v_2'' = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) + 5(0,0,1) = (2,2,0) + (0,0,5) = (2,2,5).$$

c) Les équations de $F^\perp$ sont

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Les variables non-libres sont x_1 et x_3, la variable x_2 est libre. On pose $x_2 = t$. On trouve $x_3 = 0$ et $x_1 = -t$. On obtient

$$F^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} -t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Donc le vecteur $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ forme une base de $F^\perp$.

Remarque. Il existe une méthode plus rapide. On sait que F est un plan dans $\mathbb{R}^3$ dirigé par les vecteurs v_1 et v_2. Donc $F^\perp$ est une droite orthogonale au plan F. Pour trouver le vecteur directeur de $F^\perp$, il suffit de calculer le produit vectoriel entre v_1 et v_2. On a

$$v_1 \wedge v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

C'est la même chose que $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ à une constante près.

Il exite aussi la troisième méthode. On peut utiliser le faite que $v - \mathrm{pr}_F(v) \in F^\perp$. Donc le vecteur suivant

$$v - \mathrm{pr}_F(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

forme une base de $F^\perp$.

Exercice 2. (6,5 pt)

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2 pt) $a)$ **Calculer** $\chi_A(x)$ **et déduire que les valeurs propres de** A **sont** 5, 3 **et** -1.

(2 pt) $b)$ **Trouver une base de vecteurs propres de** A.

(1 pt) $c)$ **La base trouvée dans** $b)$**, est-elle orthogonale ? orthonormée ?**

(1,5 pt) $d)$ **Diagonaliser la matrice symétrique** A **dans une base orthonormée. Donner** P **et** D **telles que** D **est diagonale,** P **est orthogonale et** $A = P \cdot D \cdot {}^tP$.

$a)$ On a

$$\chi_A(x) = \det(xI - A) = \begin{vmatrix} x-5 & 0 & 0 \\ 0 & x-1 & -2 \\ 0 & -2 & x-1 \end{vmatrix} = (x-5) \begin{vmatrix} x-1 & -2 \\ -2 & x-1 \end{vmatrix}$$

$$= (x-5)((x-1)^2 - 2^2) = (x-5)((x-1)-2)((x-1)+2) = (x-5)(x-3)(x+1).$$

On voir que les racines de ce polynôme sont bien 5, 3 et -1.

Remarque. Il est possible que vous avez calculé le polynôme $\chi_A(x) = x^3 - 7x^2 + 7x + 15$ par une autre méthode et vous ne savez pas le factoriser. Mais l'exercice vous donne déjà une indication sur les valeurs propres : 5, 3 et -1. Il suffit donc de vérifier que $x^3 - 7x^2 + 7x + 15$ est bien la même chose que $(x-5)(x-3)(x+1)$.

$b)$ $\underline{\lambda = 5}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ -2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 6x_3 = 0 \end{cases}$$

Les variables non-libres sont x_2 et x_3, la variable x_1 est libre.

On pose $x_1 = t$, on trouve $x_3 = 0$ et $x_2 = 0$. On obtient

$$E_5 = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

$\underline{\lambda = 3}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 = 0 \\ 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Les variables non-libres sont x_1 et x_2, la variable x_3 est libre.

On pose $x_3 = t$, on trouve $x_2 = t$ et $x_1 = 0$. On obtient

$$E_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

$\underline{\lambda = -1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} -6x_1 = 0 \\ -2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Les variables non-libres sont x_1 et x_2, la variable x_3 est libre.

On pose $x_3 = t$, on trouve $x_2 = -t$ et $x_1 = 0$. On obtient

$$E_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

On voit donc que les trois vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

forment une base de vecteur propres.

c) On a $(v_1, v_2) = 0$, $(v_1, v_3) = 0$ et $(v_2, v_3) = 0$, donc la base est orthogonale. (On sait que c'est vrai même sans faire des calculs parce ce que la matrice A est symétrique, d'où les trois espaces propres E_5, E_3 et E_{-1} sont orthogonaux.)

Mais cette base n'est pas orthonormée parce que $(v_2, v_2) = 2 \neq 1$.

d) La base (v_1, v_2, v_3) est déjà orthogonale. Pour obtenir une base orthonormée, il suffit juste de normer :

$$\begin{aligned}
v_1'' &= \tfrac{1}{||v_1||} v_1 = \tfrac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
v_2'' &= \tfrac{1}{||v_2||} v_2 = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\
v_3'' &= \tfrac{1}{||v_3||} v_3 = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On a donc

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. (5 pt)

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

(dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$).

(1,5 pt) a) **Démontrer que f est une isométrie.**

(2 pt) b) **Démontrer que f est une réflexion par rapport à un plan.**

(1,5 pt) c) **Donner l'équation de ce plan.**

a) On pose

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\begin{aligned}
(v_1, v_1) &= (1/3)^2 + (-2/3)^2 + (-2/3)^2 = 1/9 + 4/9 + 4/9 = 1, \\
(v_2, v_2) &= (-2/3)^2 + (1/3)^2 + (-2/3)^2 = 4/9 + 1/9 + 4/9 = 1, \\
(v_3, v_3) &= (-2/3)^2 + (-2/3)^2 + (1/3)^2 = 4/9 + 4/9 + 1/9 = 1, \\
(v_1, v_2) &= (1/3)(-2/3) + (-2/3)(1/3) + (-2/3)(-2/3) = -2/9 - 2/9 + 4/9 = 0, \\
(v_1, v_3) &= (1/3)(-2/3) + (-2/3)(-2/3) + (-2/3)(1/3) = -2/9 + 4/9 - 2/9 = 0, \\
(v_2, v_3) &= (-2/3)(-2/3) + (1/3)(-2/3) + (-2/3)(1/3) = 4/9 - 2/9 - 2/9 = 0.
\end{aligned}$$

Donc (v_1, v_2, v_3) est bien une base orthonormée. Donc f est bien une isométrie.

b) Il faut vérifier les conditions suivantes : $\det(A) = -1$ et $\operatorname{tr}(A) = 1$.

On a

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (1/3) \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = (1/3)(-3) = -1$$

et

$$\operatorname{tr}(A) = 1/3 + 1/3 + 1/3 = 1.$$

Donc f est bien une réflexion par rapport à un plan.

c) C'est le plan E_1. On a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2/3 & 2/3 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 2/3 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 2/3 & 2/3 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2/3 & 2/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2/3)x_1 + (2/3)x_2 + (2/3)x_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Donc l'équition du plan est $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.