2021-2022
Licence 2 Génie civil
Algèbre

Examen (correction)

le 5 janvier 2022

Exercice 1. (**3,5 pt**)

Soit ABC un triangle. Soit G un point à l'intérieur de ABC. Soient A_1, B_1, C_1 les points d'intersection des droites AG avec BC, BG avec AC, CG avec AB respectivement. On suppose $2AB_1 = B_1C$, $CA_1 = 5A_1B$.

(1,5 pt) *a*) **Quels poids m_A, m_B, m_C faut-il mettre en A, B et C tels que G soit le barycentre ?**

(1 pt) *b*) **Calculer BC_1/C_1A.**

(1 pt) *c*) **Calculer AG/GA_1.**

a) On peut prendre $m_A = 2$, $m_B = 5$, $m_C = 1$.

En effet, dans ce cas on a $m_A \cdot AB_1 = m_C \cdot B_1C$, d'où B_1 et le barycentre de (A, m_A), (C, m_C). Donc

$$(A, m_A), (B, m_B), (C, m_C) \qquad \Leftrightarrow \qquad (B_1, m_A + m_C), (B, m_B).$$

Donc le barycentre de $(A, m_A), (B, m_B), (C, m_C)$ ce trouve sur la droite BB_1.

On a aussi $m_C \cdot CA_1 = m_B \cdot A_1B$, d'où A_1 et le barycentre de (B, m_B), (C, m_C). Donc

$$(A, m_A), (B, m_B), (C, m_C) \qquad \Leftrightarrow \qquad (A, m_A), (A_1, m_B + m_C).$$

Donc le barycentre de $(A, m_A), (B, m_B), (C, m_C)$ ce trouve sur la droite AA_1.

Donc le barycentre de $(A, m_A), (B, m_B), (C, m_C)$ est le point G (le point d'intérsection de BB_1 avec AA_1).

b) Le point C_1 est le barycentre de $(A, m_A), (B, m_B)$ parce que le point G est le barycentre de $(A, m_A), (B, m_B), (C, m_C)$. Cela donne $m_B \cdot BC_1 = m_A \cdot C_1A$, d'où

$$BC_1/C_1A = m_A/m_B = 2/5.$$

c) On a

$$(A, m_A), (B, m_B), (C, m_C) \qquad \Leftrightarrow \qquad (A, m_A), (A_1, m_B + m_C).$$

Donc $m_A \cdot AG = (m_B + m_C) \cdot GA_1$, d'où

$$AG/GA_1 = (m_B + m_C)/m_A = (5 + 1)/2 = 3.$$

Exercice 2. **(7,5 pt) Soit**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 4 & 8 & 16 \end{pmatrix}.$$

(2 pt) *a)* **Calculer $\chi_A(x)$ et déduire que les valeurs propres de A sont 0 et 21.**

(3,5 pt) *b)* **Diagonaliser la matrice symétrique A dans une base orthonormée. Donner P et D telles que D est diagonale, P est orthogonale et $A = P \cdot D \cdot {}^tP$.**

(2 pt) *c)* **Soient $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $F = E_0$ (l'espace propre associé à la valeur propre 0).**

Calculer $\mathrm{pr}_F(v)$.

a) On a $\chi_A(x) = x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, où

$$a_2 = -\mathrm{tr}(A) = -(1+4+16) = -21,$$

$$a_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 16 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 = 0,$$

$$a_0 = -\det(A) = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 4 & 8 & 16 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

On obtient donc $\chi_A(x) = x^3 - 21x^2 = x^2(x-21)$. Les racines de ce polynôme sont bien 0 et 21.

b) On a $\dim E_0 = \mathrm{mg}_0 = \mathrm{ma}_0 = 2$, donc E_0 est un plan. On a aussi $\dim E_{21} = \mathrm{mg}_{21} = \mathrm{ma}_{21} = 1$, donc E_{21} est une droite.

$\underline{\lambda = 0}$

On a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & -4 & 0 \\ -2 & -4 & -8 & 0 \\ -4 & -8 & -16 & 0 \end{array}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Leftrightarrow \quad -x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0$$

On pose $x_2 = t$, $x_3 = s$, d'où $x_1 = -2t - 4s$. On obtient

$$E_0 = \left\{ \begin{pmatrix} -2t-4s \\ t \\ s \end{pmatrix}, t, s \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Donc les vecteur $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base de E_0.

On applique Gram-Schmidt pour obtenir une base orthonormée :

$$\begin{array}{rcl cl}
v_1' &=& v_1 &=& (-2,1,0) \\
v_2' &=& v_2 - \frac{(v_2,v_1')}{(v_1',v_1')}v_1' &=& (-4,0,1) - \frac{8}{5}(-2,1,0) = (-4/5,-8/5,1) = \frac{1}{5}(-4,-8,5) \\
v_1'' &=& \frac{1}{||v_1'||}v_1' &=& \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0) \\
v_2'' &=& \frac{1}{||v_2'||}v_2' &=& \frac{1}{\sqrt{105}}(-4,-8,5)
\end{array}$$

Les vecteurs v_1'' et v_2'' forment une base orthonormée de E_0.

$\underline{\lambda = 21}$

On a $E_{21} = (E_0)^{\perp}$. Donc le vecteur $v_3 = (-1,-2,-4)$ est une base de E_{21} (c'est un vecteur normal au plan E_0 qui a l'équation $-x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0$. Le vecteur $v_3'' = \frac{1}{\sqrt{21}}(-1,-2,-4)$ forme une base ortonormée de E_{21}.

Finalement on obtient $A = P \cdot D \cdot {}^tP$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 21 \end{pmatrix}.$$

et

$$P = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & -4/\sqrt{105} & -1/\sqrt{21} \\ 1/\sqrt{5} & -8/\sqrt{105} & -2/\sqrt{21} \\ 0 & 5/\sqrt{105} & -4/\sqrt{21} \end{pmatrix}.$$

c) On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{pr}_F(v) = (v, v_1'')v_1'' + (v, v_2'')v_2'' &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0) + \frac{1}{\sqrt{105}} \cdot (-63) \cdot \frac{1}{\sqrt{105}}(-4,-8,5) \\
&= \frac{6}{5}(-2,1,0) - \frac{3}{5}(-4,-8,5) = (0,6,-3).
\end{aligned}$$

Remarque. La bonne formule est

$$\mathrm{pr}_F(v) = (v, v_1'')v_1'' + (v, v_2'')v_2''.$$

On n'a pas droit de faire

$$(v, v_1)v_1 + (v, v_2)v_2$$

parce que (v_1, v_2) n'est pas une base orthonormée. Dans cet exercice la mauvaise formule donne la bonne réponse. C'est vraiment une coïncidence ! Pour un autre v, la deuxième formule ne marchera pas.

Exercice 3. (3 pt) Pour les matrices suivantes, dire, avec justification, si elles sont diagonalisables. (On ne vous demande pas de diagonaliser la matrice. On demande seulement si elle est diagonalisable.)

Indication : il ne faut pas perdre trop de temps sur cet exercice. Pour chaque question, il est possible de donner la réponse sans faire trop de calculs.

(1,5 pt) *a*)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1,5 pt) *b*)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 13 \\ 4 & 7 & 3 \\ 13 & 3 & 21 \end{pmatrix}.$$

a) On a $\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 4 \\ -5 & x \end{vmatrix} = x^2 - x + 20.$

On a $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20 = -79 < 0$. Donc $\chi_A(x)$ n'a pas de racines réelles. Donc A n'est pas diagonalisable.

b) La matrice A est symétrique, donc elle est diagonalisable.

Exercice 4. (3,5 pt)

(1,5 pt) *a*) **Donner la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, de l'isométrie suivante : la réflexion de plan (Oxz).**

(2 pt) *b*) **Donner la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, de l'isométrie suivante : la symétrie par rapport à la droite donnée par l'équation**

$$2x + 5y = 0.$$

Dans *b*), **on peut appliquer la formule**

$$f(u) = u - \frac{2(w,u)}{(w,w)} w.$$

a) On a

$$f(e_1) = e_1, \quad f(e_2) = -e_2, \quad f(e_3) = e_3.$$

Donc la matrice est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) On peut prendre $w = (2,5)$. On a

$$f(e_1) = e_1 - \frac{2(w,e_1)}{(w,w)} w = (1,0) - \frac{2 \cdot 2}{29}(2,5) = (21/29, -20/29).$$

$$f(e_2) = e_2 - \frac{2(w,e_2)}{(w,w)} w = (0,1) - \frac{2 \cdot 5}{29}(2,5) = (-20/29, -21/29).$$

On obtient donc la matrice

$$\begin{pmatrix} 21/29 & -20/29 \\ -20/29 & -21/29 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. **(2,5 pt)**

On admet que l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$) est une isométrie.

(0,5 pt) a) **Démontrer que c'est une rotation.**

(1 pt) b) **Déterminer l'axe de rotation.**

(1 pt) c) **Déterminer l'angle de rotation.**

a) On a $\det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$. Donc c'est une rotation.

b) L'axe est E_1. Il faut résoudre le système

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ 2x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

On pose $x_3 = t$ et on obtient $x_2 = 0$ et $x_1 = x_3 = t$. Donc

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Donc l'axe est dirigé par le vecteur $(1, 0, 1)$.

c) On a

$$2\cos(\theta) + 1 = \operatorname{tr}(A) = 0 + (-1) + 0 = -1.$$

Donc $\cos(\theta) = -1$. Donc $\theta = \pi$ (modulo 2π).

Remarque. Il n'y a pas de différence entre π et $-\pi$.