2021-2022
Licence 2 Génie civil
Algèbre

Examen

le 5 janvier 2022

Chaque réponse doit être justifiée

2 pages

Exercice 1. (**3,5 pt**)

Soit ABC un triangle. Soit G un point à l'intérieur de ABC. Soient A_1, B_1, C_1 les points d'intersection des droites AG avec BC, BG avec AC, CG avec AB respectivement. On suppose $2AB_1 = B_1C$, $CA_1 = 5A_1B$.

(1,5 pt) *a*) Quels poids m_A, m_B, m_C faut-il mettre en A, B et C tels que G soit le barycentre ?

(1 pt) *b*) Calculer BC_1/C_1A.

(1 pt) *c*) Calculer AG/GA_1.

Exercice 2. (**7,5 pt**) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 4 & 8 & 16 \end{pmatrix}.$$

(2 pt) *a*) Calculer $\chi_A(x)$ et déduire que les valeurs propres de A sont 0 et 21.

(3,5 pt) *b*) Diagonaliser la matrice symétrique A dans une base orthonormée. Donner P et D telles que D est diagonale, P est orthogonale et $A = P \cdot D \cdot {}^tP$.

(2 pt) *c*) Soient $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $F = E_0$ (l'espace propre associé à la valeur propre 0).

Calculer $\mathrm{pr}_F(v)$.

Exercice 3. (**3 pt**) Pour les matrices suivantes, dire, avec justification, si elles sont diagonalisables. (On ne vous demande pas de diagonaliser la matrice. On demande seulement si elle est diagonalisable.)

Indication : il ne faut pas perdre trop de temps sur cet exercice. Pour chaque question, il est possible de donner la réponse sans faire trop de calculs.

(1,5 pt) *a*)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1,5 pt) *b*)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 13 \\ 4 & 7 & 3 \\ 13 & 3 & 21 \end{pmatrix}.$$

Tournez la page, s'il vous plaît

Exercice 4. (3,5 pt)

(1,5 pt) *a*) Donner la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, de l'isométrie suivante : la réflexion de plan (Oxz).

(2 pt) *b*) Donner la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, de l'isométrie suivante : la symétrie par rapport à la droite donnée par l'équation

$$2x + 5y = 0.$$

Dans *b*), on peut appliquer la formule

$$f(u) = u - \frac{2(w, u)}{(w, w)} w.$$

Exercice 5. (2,5 pt)

On admet que l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$) est une isométrie.

(0,5 pt) *a*) Démontrer que c'est une rotation.

(1 pt) *b*) Déterminer l'axe de rotation.

(1 pt) *c*) Déterminer l'angle de rotation.