CYU L1S2 SV : Contrôle continu terminal de l'option Mathématiques, durée 2h 18 mai 2021

Calculatrice lycée autorisée ainsi qu'une feuille d'aide mémoire manuscrite recto-verso

Exercice 1.
Soit (u_n) la suite définie par récurrence par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 3 - \frac{1}{2}u_n$.

1. (u_n) est-elle arithmétique ou géométrique ? Justifiez.
2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_n - 2$.
   Montrer que (w_n) est géométrique et donner son premier terme ainsi que sa raison.
3. (w_n) est-elle croissante ? Est-elle décroissante ? Est-elle convergente ? Si oui, vers quelle valeur ?
4. Montrer que (u_n) est convergente et donner sa limite.

Exercice 2. Dans une urne se trouve deux boules noires et deux boules blanches. On tire successivement et sans remise deux boules de l'urne. Une boule noire rapporte 1 point et une boule blanche 0 point. On appelle X_1 la variable aléatoire égale au gain pour la première boule tirée et X_2 la variable aléatoire égale au gain pour la seconde boule. D'autre part $S = X_1 + X_2$ est le gain total sur les deux boules.

1. Donner la loi du couple (X_1, X_2).
2. Calculer la covariance de X_1 et X_2. X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
3. Donner l'espérance et la variance de S.

Exercice 3. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale de paramètre $\mu = 3$ et $\sigma = 2$ (autrement dit $V = 2^2 = 4$).
Donner les probabilités suivantes, arrondies au millième :
$P(X = 3)$, $P(X \geq 5)$, $P(X \leq 4)$, $P(0 \leq X \leq 5)$.

Exercice 4. (Source : Hyperbole Spé math, entre crochets mes précisions sur cet exercice)
Dans une ville moyenne de 20 000 habitants, lors d'une consultation portant sur la rénovation du théâtre municipal, 75% des personnes consultées ont émis un avis positif [*autrement dit : tout le monde a été consulté,* 15 000 *habitants sont pour et* 5 000 *sont contre. Ce qui amène à penser qu'aucune personne était en incapacité de répondre et que tout le monde avait un avis tranché.*].

1. On interroge n personnes [$1 \leq n \leq 20\,000$, *et on suppose le choix des personnes aléatoire*]. Pour k compris entre 1 et n (inclus), on note X_k la variable aléatoire donnant 1 si la k-ème personne interrogée [*encore !*] est favorable au projet et 0 sinon.
   Donner la loi de probabilité de X_k, son espérance μ et sa variance V.
2. On note $S_n = X_1 + X_2 + \ldots X_n$. Quelle loi exacte est suivie par S_n ? Donner ses paramètres.
3. Pourquoi S_{20000} est-elle constante ? En déduire que X_1, X_2, ..., X_n ne sont pas indépendantes.
4. On suppose $100 \leq n \leq 2000$, par quelle(s) loi(s) plus simples peut-on approcher S_n ? Justifier.
5. A l'aide de la loi approchée, donner une approximation de $P(0,7 \leq \frac{S_{1000}}{1000} \leq 0,8)$

Exercice 5. Taille des galets de plage en fonction de leur arrondi, exemple tiré de Krumbein and Graybill (1965).
Calculer le coefficient de corrélation de X et Y.

degré d'arrondi (X)	.62	.74	.65	.71	.68	.59	.49	.67	.64	.56
Taille du galet en mm (Y))	52	43	36	32	27	26	22	37	24	19

Correction

Exercice 1.
Soit (u_n) la suite définie par récurrence par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 3 - \dfrac{1}{2}u_n$.

1. $u_0 = 1$, $u_1 = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$, $u_2 = 3 - \frac{5}{4} = \frac{7}{4}$. On a $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ et $u_1/u_0 \neq u_2/u_1$ donc la suite n'est ni arithmétique, ni géométrique.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = u_{n+1} - 2 = 3 - \frac{1}{2}u_n - 2 = 1 - \frac{1}{2}u_n = 1 - \frac{1}{2}(2 + w_n) = 1 - (1 + \frac{1}{2}w_n) = -\frac{1}{2}w_n$. Donc (w_n) est géometrique de raison $-\frac{1}{2}$ et de premier terme $w_0 = u_0 - 2 = -1$.

3. Comme la raison de (w_n) est négative, on aura $w_1 > 0$ et $w_2 < 0$ avec $w_0 < 0$, ainsi $w_1 - w_0$ et $w_2 - w_1$ sont de signes différents et (w_n) n'est ni croissante, ni décroissante.
   En revanche, comme la raison de la suite est strictement comprise entre -1 et 1, (w_n) converge vers 0.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 + w_n$, donc par somme de limite, la limite de (u_n) est $2 + 0 = 2$.

Exercice 2.

1.

X_1/X_2	0	1
0	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{3}$
1	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{6}$

2. X_1 et X_2 suivent des lois de Bernoulli de paramètre $1/2$. Donc $E(X_1) = E(X_2) = \frac{1}{2}$. D'autre part, $E(X_1X_2) = \frac{1}{6} \times 0 + \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{6} \times 1 = \frac{1}{6}$. On en déduit $cov(X_1, X_2) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{12}$.

3. $P(S = 0) = P(X_1 = 0 \cap X_2 = 0) = \frac{1}{6}$, $P(S = 1) = P((X_1 = 0 \cap X_2 = 1) \cup (X_1 = 1 \cap X_2 = 0)) = P((X_1 = 0 \cap X_2 = 1)) + P(X_1 = 1 \cap X_2 = 0) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, $P(S = 2) = P(X_1 = 1 \cap X_2 = 1) = \frac{1}{6}$. On a $E(S) = E(X_1) + E(X_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, $E(S^2) = \frac{1}{6} \times 0^2 + \frac{2}{3} \times 1^2 + \frac{1}{6} \times 2^2 = \frac{2}{3} + \frac{4}{6} = \frac{4}{3}$. D'où $V(S) = \frac{4}{3} - 1^2 = \frac{1}{3}$.

Exercice 3.
$P(X = 3) = 0$ comme pour tout variable aléatoire continue.
$P(X \geq 5) \approx 0,158$
$P(X \leq 4) \approx 0,692$
$P(0 \leq X \leq 5) \approx 0,774$.
Exercice 4.

1. X_k est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\frac{3}{4}$. Donc $E(X_k) = \frac{3}{4}$ et $V(X_k) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$.

2. S_n est une loi hypergéométrique de paramètre n, $N_1 = 15000$ et $N_2 = 5000$.

3. S_{20000} est forcément égale à 15000 car on aura interrogé à nouveau tous les habitants, donc, à moins qu'ils ne changent d'avis, 15000 seront pour et 5000 contre.

4. Posons $N = N_1 + N_2 = 20000$. On a $n \leq \frac{N}{10}$, donc on peut approcher la loi de S_n par une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{3}{4}$. Comme $np > 15$ et $np(1 - p) > 5$, on peut encore approcher cette loi par une loi normale de paramètre $\mu = \frac{3}{4}n$ et $V = np(1 - p) = \frac{3}{16}n$

5. on peut approcher S_{1000} par une loi normale de paramètre $\mu = 750$ et $\sigma = \sqrt{1000 \times \frac{3}{16}} \approx 13,69$. Soit N une variable aléatoire suivant cette loi normale.

$$P(0,7 \leq \frac{S_{1000}}{1000} \leq 0,8) = P(700 \leq S_{1000} \leq 800) \approx P(699,5 \leq N \leq 800,5) \approx 0,9998$$

Exercice 5. $\bar{x} = 0,635$, $\bar{y} = 31,8$, $V(x) = 0.004905$, $V(y) \approx 95,56$, $cov(x, y) = 0,352$, $\rho = 0,514$. X et Y sont donc peu corrélées.