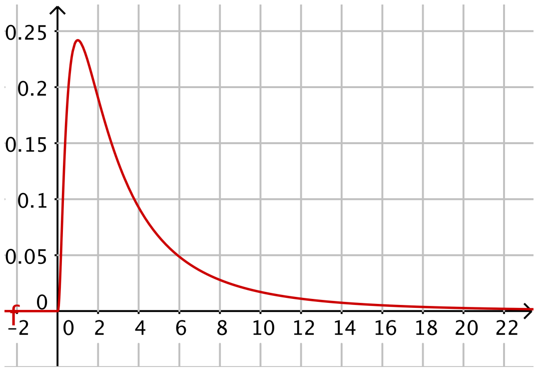
Nř copie .... L1 SV S2, Probabilités-Statistiques Examen, durée : 2h 2017-2018.

Pour chacune de ces questions, il n'y a qu'une seule bonne réponse. Vous devez entourer la bonne réponse sans aucune justification. En cas de changement d'avis, entourez deux fois la bonne réponse. Une absence de réponse donne 0 point, une bonne réponse rapporte $2/3$ de point et une mauvaise réponse enlève $\frac{1}{3}$ point. Toute note négative vaut zéro.

---

1. Soit X une variable aléatoire de densité donnée par le graphique :



   (a) $P(X = 2) \approx$ .... 0 | 0,2 | 0,1

   Correction Il s'agit d'une loi continue donc $P(X = 2) = 0$

   (b) $P(4 < X < 6) \approx$ .... 0,05 | 0,5 | 0,14

   Correction On voit sur le graphique que l'aire d'un rectangle est $2 \times 0{,}05 = 0{,}1$. L'aire sous la courbe entre les abscisses 4 et 6 vaut un peu moins qu'un rectangle et demi, donc la bonne réponse est 0,14.

   (c) $E(X) \approx$ .... 4,5 | 20 | 0,24

   Correction Les valeurs extrêmes ne représentent clairement pas une valeur moyenne prise par la variable aléatoire. Seule la valeur 4,5 parait raisonnable.

2. Un professeur faisant passer un examen est né le 3 mars. Il décide de compter le nombre d'étudiants ayant la même date d'anniversaire parmi les 300 présents. On suppose que la probabilité est uniforme sur une année avec 365 jours, et on note X le nombre d'étudiant ayant la même date d'anniversaire.

   (a) X suit une loi ... binomiale | de Poisson | hypergéométrique

   Correction I s'agit d'une loi binomiale de paramètre $n = 300$ et $p = 1/365$.

   (b) On peut approcher cette loi par ... une loi de Poisson | une loi Binomiale | une loi uniforme

   Correction On a bien les conditions pour approcher par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 300/365$

   (c) $P(X \geq 1)$ vaut à 10^{-2} près : 0,24 | 0,56 | 0,76

   Correction $1 - P(X = 0) \approx 1 - e^{-\lambda} \approx 0{,}55$.

3. On relève le poids de 12 comprimés qui suivent une loi normale de paramètres μ et σ inconnus. Soit $\bar{x}$ le poids moyen des comprimés, et S^2 la variance empirique. $\tilde{S}^2 = \frac{12}{11}S^2$ est alors un estimateur sans biais de σ^2. L'intervalle de confiance à 95% pour μ est $[\bar{x} - t\tilde{S}, \bar{x} + t\tilde{S}]$ avec t qui vaut : 2,201 | 1,96 | 2,179

   Correction On utilise une loi de Student avec 11 degrés de liberté.

4. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale de paramètre μ et $\sigma = 0,12$.
   On sait que $P(X \geq 1{,}4) = 0{,}2023$.
   La valeur de μ est environ 0,8 | 1 | 1,3

   Correction

5. 95% des pandas géants ont un poids compris entre 80kg et 120kg. Sachant que le poids des pandas géants suit une loi normale d'espérance 100kg, quelle est la valeur de l'écart-type, à 0,5 près ? 20 | 40 | 10

   Correction On sait que pour une loi normale, 95% des valeurs sont dans un intervalle de longueur $2 \times 1{,}96\sigma$, soit à peu près 4σ. Donc ici $4\sigma \approx 120 - 80 = 40$ et $\sigma \approx 10$.

6. Dans le jeu «Fort Boyard» un candidat doit soulever des araignées pour trouver des codes. On suppose qu'il y a 80 araignées et que 10 ont un code. Le candidat doit trouver seulement 3 codes mais il n'a le temps que de soulever 23 araignées. On

suppose qu'il ne soulève jamais deux fois le même animal. On appelle X le nombre de codes qu'il réussit à trouver.

(a) X suit une loi ... Hypergéométrique | de Poisson | Binomiale

Correction Il n'y a pas de remise donc c'est une loi Hypergéométrique.

(b) Peut-on approcher cette loi ?
Oui, par une loi de Poisson | Oui, par une loi binomiale | Non

Correction Non, car on soulève plus du dixième du nombre total d'araignées.

(c) On a $E(X) < 3$ | $E(X) = 3$ | $E(X) > 3$

Correction $E(X) = 23 \times \frac{10}{80} < \frac{24}{8} = \frac{1}{3}$

7. Un sondage sur 25 étudiants montre que 7 d'entre eux sont fumeurs.

(a) Quel intervalle de confiance avec un niveau de confiance égal à 95% peut-on donner à la proportion d'étudiants fumeurs ? $[0{,}12; 0{,}48]$ | $[0{,}04; 0{,}56]$ | $[0{,}10; 0{,}43]$

Correction La fréquence observée est $7/25 = 0{,}28$, on utilise les abaques pour lire verticalement l'intervalle de confiance pour la proportion.

(b) On interroge 5 étudiants de plus et 2 élèves parmi ceux-là sont fumeurs. Peut-on affirmer avec un niveau de confiance au moins égal à 95% que les étudiants fumeurs sont minoritaires ? oui | Non, il faudrait interroger la moitié des étudiants | Non, il faudrait encore interroger 5 étudiants

Correction Cette fois-ci, on a une fréquence égale à $9/30 = 0{,}3$, mais toujours avec une abaque on peut voir qu'on reste en dessous des 50% pour p, avec un niveau de confiance de 95%.

8. Charlie prétend que sa pièce de monnaie est équilibrée. John lance alors 30 fois la pièce et il constate qu'elle est tombée 10 fois sur face. la pièce n'a pas l'air équilibrée | il s'agit d'une fluctuation normale. | la pièce n'est pas équilibrée

Correction D'après les abaques, par lecture horizontale, avec un niveau de confiance de 95%, la fréquence observée (nombre de face / nombre de lancers) devrait être comprise entre 0,33 et 0,67, c'est à dire entre 10 et 20 fois. Il s'agit donc d'une fluctuation normale (mais limite). La réponse "cette pièce n'est pas équilibrée" n'a pas de malus.

9. On donne la loi du couple de variables aléatoires (X, Y).

$Y \setminus X$	0	1
0	0	0,3
1	0,6	0,1

(a) X et Y indépendantes | XY est une loi de Bernoulli | Y est une loi géométriq

Correction $P(X = 0 \cap Y = 0) = 0 \neq P(X = 0) \times P(Y = 0)$ donc X et Y non indépendantes. Y ne prend que deux valeurs donc n'est pas géométrique. XY ne prend que les valeurs 0 et 1 donc est une loi de Bernoulli.

(b) $E(X)$ vaut ... 0,3 | 0,4 | 0,1

Correction X est une loi de Bernoulli, donc $E(X) = P(X = 1) = 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}4$

(c) $V(Y)$ vaut ... 0,06 | 0,21 | 0,18

Correction Y est également une loi de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}7$ donc sa variance est $V(Y) = p(1 - p) = 0{,}7 \times 0{,}3 = 0{,}21$

(d) le coefficient de corrélation est ... positif | nul | négatif

Correction Le numérateur de la fraction servant à calculer le coefficient de corrélation est $E(XY) - E(X)E(Y) = 0{,}1 - 0{,}4 \times 0{,}7 < 0$.

10. Soit X une variable aléatoire continue d'espérance 100 et d'écart-type 5. Que peut-on dire sur $a = P(80 \leq X \leq 120)$? C'est plus grand que $1/4$ | aucune des deux autres est toujours vraie | C'est plus petit que $1/4$

Correction On conclut avec Bienaymé-Tchebychev

11. On sait que la durée de vie d'un téléphone portable suit une loi exponentielle de paramètre $p = 1/3$.

(a) La probabilité qu'un téléphone dure plus que 4 ans est environ ... 0,152 | 0,264 | 0,429

Correction Soit X cette variable aléatoire. On veut calculer $P(X \geq 4) = 1 - (1 - P(X \leq 4)) = e^{-4/3} \approx 0{,}263$

(b) Sachant qu'un téléphone marche encore au bout de 4 ans, la probabilité qu'il marche encore au bout de 8 ans est environ ... $\boxed{0{,}152}$ $\boxed{0{,}264}$ $\boxed{0{,}429}$

Correction La loi exponentielle est sans mémoire, donc on retrouve le même résultat qu'à la question précédente.

12. Un géologue parcourt chaque jour le désert d'Atacama à la recherche de météorites. Il est équipé pour en prendre 4 au maximum. On estime que le nombre de météorites qu'il trouve suit une loi de Poisson de paramètre 2,1.

(a) La proportion de jours où il ne trouve aucune météorite vaut $\approx$ $\boxed{12\%}$ $\boxed{17\%}$ $\boxed{22\%}$

Correction On cherche $P(X = 0) = e^{-2{,}1} \approx 12{,}25\%$

(b) La proportion de jours pour lesquels il n'est pas suffisamment équipé vaut $\approx$ $\boxed{10\%}$ $\boxed{4\%}$ $\boxed{6\%}$

Correction On cherche $P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - e^{-2{,}1}(1 + 2{,}1 + \frac{2{,}1^2}{2} + \frac{2{,}1^3}{6} + \frac{2{,}1^4}{24}) \approx 6{,}21\%$

13. Une personne lance une pièce de monnaie équilibrée 100 fois. Il veut parier (à 1 contre 1) qu'il obtiendra face entre 46 et 54 fois inclus. Ce jeu est ... $\boxed{\text{En sa défaveur}}$ $\boxed{\text{équitable}}$ $\boxed{\text{En sa faveur}}$

Correction Il faut déterminer un intervalle de pari pour une proportion égale à 50%. Comme $n > 30$, $np > 15$, $npq > 5$ on peut approcher la loi binomiale par une loi normale de paramètre $\mu = 50$ et $\sigma = \sqrt{25} = 5$. Avec $t = 0{,}675$, on déduit que dans 50% des cas on aura entre $50 - 0{,}675 \times 5 \approx 46{,}6$ et $53{,}4$, c'est à dire entre 47 et 53 inclus. En rajoutant 46 et 54, le jeu devient en sa faveur. Comme la situation est proche de l'équilibre, la réponse "équitable" n'est pas sanctionnée et rapporte même un demi-point.

14. Un biologiste observe des cellules dont il sait que 3% présentent une anomalie. Sur deux cellules observées, . . .

(a) Quelle est la probabilité que les deux cellules présentent une anomalie ? $\boxed{0{,}03}$ $\boxed{0{,}06}$ $\boxed{0{,}0009}$

Correction On peut faire un arbre de probabilité, on trouve alors que la probabilité vaut $0{,}03^2 = 0,0009$.

(b) Quelle est la probabilité que l'une des deux soit normale et l'autre non ? $\boxed{0{,}0333}$ $\boxed{0{,}0253}$ $\boxed{0{,}0582}$

Correction Cela correspond à deux feuilles de l'arbre qui ont pour probabilité $0{,}03 \times 0{,}97 = 0{,}0291$, donc la réponse est $2 \times 0{,}0291 = 0{,}0582$.

15. Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale d'espérance 4 et d'écart-type 3.

(a) À 10^{-3} près, $P(X \leq 5)$ vaut : $\boxed{0,708}$ $\boxed{0,631}$ $\boxed{0,499}$

Correction

(b) À 10^{-3} près, $P(X \leq 2)$ vaut : $\boxed{0,253}$ $\boxed{0,321}$ $\boxed{0,278}$

Correction

(c) À 10^{-3} près, $P(0 \leq X \leq 3)$ vaut : $\boxed{0,321}$ $\boxed{0,253}$ $\boxed{0,278}$

Correction