L1 SV
Probabilités
2016/2017

Examen, 15 mai 2017, 2 heures

Appareils connectés interdits ou éteints. Calculatrice autorisée ainsi qu'un aide-mémoire manuscrit et personnel tenant sur une page A4 recto-verso (ou deux pages a4 recto), qu'une table de la loi normale.

Exercice 1 : (4,5 points) On donne ci-contre la loi du couple de variables aléatoires (X, Y).

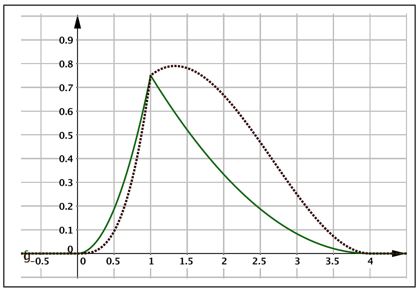
$Y \setminus X$	-1	0	1
0	0,3	0,3	0,2
1	0	0,1	0,1

1. Donnez les lois de X et de Y (sous forme de tableau).[1pt]
2. X et Y sont-elles indépendantes ? Justifier.[1pt si justifié]
3. On construit la variable aléatoire $Z = XY$. Reconnaitre la loi de Z et donner son espérance et sa variance.[1 :loi ; 0,5 :nom ; 0,5 esp ; 0,5 var]

Exercice 2 : (4 points) On suppose que le poids (en tonne) d'un taureau de type charolais pris au hasard est une variable aléatoire X qui suit une loi normale de moyenne $\mu_1 = 1$ et d'écart-type $\sigma_1 = 0,2$. On suppose de même, que pour les taureaux de type Holstein, on a une variable aléatoire Y qui suit une loi normale de moyenne $\mu_2 = 0,85$ et d'écart-type $\sigma_2 = 0,15$.

1. Donner les probabilités suivantes : $P(X \geq 1,2)$, $P(0,7 \leq X \leq 1,3)$, $P(Y < 0,8)$.[0,5+0,5+0,5]
2. Comme X et Y sont indépendantes, $Z = Y - X$ suit une loi normale. Donner l'espérance de Z et justifier que son écart-type est $\sigma_3 = 0,25$.[0,5+0,5]
3. Donner la probabilité qu'un taureau de type charolais pris au hasard soit plus gros qu'un taureau de type Holstein pris au hasard.[1 : $P(Z \leq 0)$; 0,5 : calcul]

Exercice 3 : (4 points)
On a représenté la courbe (en traits pleins) de la densité f de la loi d'une variable aléatoire X dans le dessin ci-contre.



1. A-t-on $P(X \leq 1) \geq \frac{1}{2}$? Justifier.[1]
2. Sachant que pour $x \in [0, 1]$, la densité a pour équation $f(x) = \frac{3}{4}x^2$, calculez la valeur exacte de $P(X \leq 1)$.[1]
3. La courbe dessinée en pointillé est la courbe de la fonction g définie par $g(x) = xf(x)$.
Que représente l'aire sous cette courbe par rapport à la variable aléatoire X ?
A l'aide du graphique, donnez une valeur approchée de sa valeur.[1+1]

Exercice 4 : (3 points) On effectue des tests médicaux sur 300 personnes. Chaque test a une probabilité égale à 2% de ne pas donner de résultat lisible (ni positif, ni négatif). On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de tests qui n'ont pas donné un résultat lisible.

1. Quelle est la loi suivie par X, quels sont ses paramètres ?[1. Bonus 0,5 si bonne justif]
2. Par quelle loi plus simple peut-on l'approcher ?[1]
3. Donner la vraie valeur (formule et calcul) ainsi que l'estimation (formule et calcul) avec la loi approchée de $P(X = 6)$.[0,5+0,5+0,5+0,5]

Exercice 5 : (3 points) 10 taureaux d'une nouvelle race ont pour poids respectif 0,973 ; 0,864 ; 0,920 ; 0,973 ; 0,648 ; 0,948 ; 0,915 ; 0,857 ; 0,812 ; 0,965. On calcule facilement que la somme de leurs poids vaut 8,875 tonnes et la somme des carrés de leurs poids vaut 7,967. On suppose que le poids d'un taureau pris au hasard suit une loi normale de paramètres μ et σ inconnus.

1. Quel est le poids moyen des taureaux ? Donner la valeur de la variance empirique, ainsi que l'estimateur sans biais de la variance.[0,5+0,5+0,5]
2. Donner un intervalle de confiance à 95% pour la valeur de μ. Justifier les calculs[1. justification inutile en fait]

Exercice 6 : (2 points) Le 7 mai 2017 lors du second tour de l'élection présidentielle, le journal belge RTBF publie à 19h sur son site une information prétendant que Macron l'emporterait avec un score entre 62% et 65%.

En supposant que la fourchette donnée correspond à un intervalle de confiance de 95%, quel était à peu près le nombre de personnes interrogées (hors blancs et nuls) ? Justifier votre réponse. [1 si trace de recherche 1 résultat correct]

Correction de l'examen de mai 2017 SV L1 S2

Exercice 1 : 1.

x_i	-1	0	1
$P(X = x_i)$	0,3	$0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}4$	$0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}3$

y_i	0	1
$P(Y = y_i)$	$0{,}3 + 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}8$	$0 + 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}2$

2. X et Y ne sont pas indépendantes, par exemple $P(X = -1 \cap Y = 1) = 0$ alors que $P(X = -1) \times P(Y = 1) \neq 0$
3. Z peut a priori prendre comme valeurs tous les produits des éléments de $X(\Omega) = \{-1; 0; 1\}$ par les éléments de $Y(\Omega) = \{0; 1\}$, c'est à dire $\{-1; 0; 1\}$. Cependant, la seule façon d'obtenir -1 est avec $X = -1$ et $Y = 1$ qui est un événement impossible. Don finalement, Z ne peut prendre comme valeur que 0 et 1.
   Il s'agit donc d'une loi de $\boxed{\text{Bernoulli}}$, dont la table est :

z_i	0	1
$P(Z = z_i)$	$0{,}3 + 0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}9$	0,1

   $E(Z) = 0,1$ et $V(Z) = 0,1 \times 0,9 = 0,09$

Exercice 2 : 1. $P(X \geq 1,2) \approx 0,1587$, $P(0,7 \leq X \leq 1,3) \approx 0,8664$, $P(Y < 0,8) \approx 0,3695$.
2. $E(Z) = E(Y) - E(X) = 0,85 - 1 = -0,15$. Comme X et Y sont indépendantes, on a $V(Z) = V(X) + V(-Y) = V(X) + V(Y) = 0,2^2 + 0,15^2 = 0,0625 = 0,25^2$, donc $\sigma(Z) = 0,25$
3. $P(Z \leq 0) \approx 0,7257$

Exercice 3 : 1. L'aire sous la courbe dessinée en traits plein vaut exactement 1. Il apparaît clairement que l'aire située sous la courbe et à gauche de la droite d'équation $x = 1$ est plus petite que l'aire située sous la courbe et à droite de la droite d'équation $x = 1$, donc $P(X \leq 1) < \frac{1}{2}$. La réponse est $\boxed{\text{non}}$.
2. On doit calculer $\int_0^1 \frac{3}{4}x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$
3. L'aire sous la courbe en pointillé est $\boxed{\int_0^1 xf(x)\,dx = E(X)}$.
   Un rectangle du quadrillage a pour aire $0,1 \times 0,5 = 0,05$. Sous la courbe en pointillé, on en compte environ 30, donc l'aire (l'espérance) vaut à peu près $\boxed{1,5}$.

Exercice 4 : 1. Il s'agit d'une loi binomiale de paramètres $n = 300$ et $p = 2\%$, car les tests sont effectués de façon indépendante. $\boxed{X \hookrightarrow B(300; 0,02)}$
2. Comme $n \geq 30$, $np = 6 < 15$ et $p < 0,1$, on peut approcher la loi de X par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np = 6$.
3. Avec la loi binomiale : $P(X = 6) = \binom{300}{6}p^6(1-p)^{294} \approx 0,1622$.
   Si $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(6)$ alors $P(Y = 6) = e^{-6}\frac{6^6}{6!} \approx 0,1606$

Exercice 5 : 1. Le poids moyen des taureaux est $\bar{x} = \frac{8,875}{10} = 0,8875$.
   La variance empirique est la moyenne des carrés moins le carré de la moyenne, c'est à dire :

$$V = \frac{7,967}{10} - 0,8875^2 \approx 0,00904$$

   L'estimateur sans biais de la variance est $\tilde{V} = \frac{10}{9}V \approx 0,01$
2. Comme l'écart-type est inconnu et l'effectif est plus petit que 30, on va utiliser une loi de Student avec $10 - 1 = 9$ degrés de liberté. On trouve $t = 2,262$ et l'intervalle de confiance pour la valeur de μ est $\left[\bar{x} - t \times \frac{\tilde{s}}{\sqrt{9}}; \bar{x} + t \times \frac{\tilde{s}}{\sqrt{9}}\right]$ avec $\tilde{s} = \sqrt{\tilde{V}} \approx 0,1$, donc environ $[0,8121; 0,9629]$

Exercice 6 : Soit n le nombre de personnes interrogées et p la proportion (inconnue) des personnes en faveur de $Macron$. La fréquence observée des personnes en faveur de Macron est le milieu de l'intervalle, c'est à dire $f = 0,635$. On peut donc supposer de façon raisonnable que $n > 30$, $np > 15$ et $np(1-p) \geq 5$. La largeur de l'intervalle de confiance au risque de 5% est donc $2 \times 1,96 \times \sqrt{\frac{f(1-f)}{n-1}}$. D'après l'énoncé, ce nombre est égal à 3%. Il faut donc résoudre l'équation d'inconnue n :

$$2 \times 1,96 \times \sqrt{\frac{f(1-f)}{n-1}} = 0,03$$

On trouve $n \approx 3957 + 1 = 3958$