L1 SV
Probabilités
2015/2016

Examen, 19 mai 2016, 2 heures

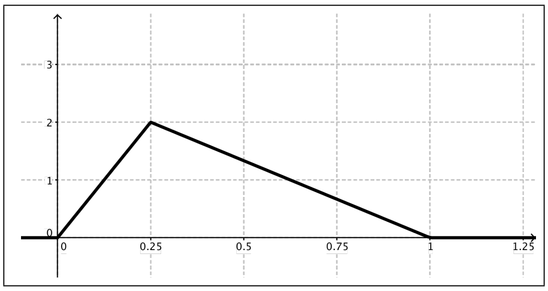
Appareils connectés interdits ou éteints. Calculatrice autorisée ainsi qu'un aide-mémoire manuscrit et personnel tenant sur une page A4 recto-verso (ou deux pages a4 recto), qu'une table de la loi normale.

Exercice 1 : (4,5 points) Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre 0,5 ; et soit Y une variable aléatoire indépendante de X, qui suit également une loi de Bernoulli de paramètre 0,1. On pose alors $Z = X + Y$

1. Donner la loi de Z, son espérance et sa variance.
2. Donner la loi du couple (X, Z).
3. Z et X sont-elles indépendantes ? Justifier.
4. Calculer le coefficient de corrélation entre X et Z.

Exercice 2 : (3 points) Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale $\mathcal{N}(11, 2^2)$. calculer les probabilités suivantes : $P(X \leq 15)$, $P(X \geq 7)$, $P(X \leq 9)$.

Exercice 3 : (4,5 points)
On a représenté la courbe de la densité f de la loi d'une variable aléatoire X dans le dessin ci-contre.



1. Calculer $P(X \geq 2)$ et $P(X \leq 0{,}25)$ et $P(X \geq 0{,}5)$.
2. On trouve facilement que pour $x \in [0; 0{,}25]$, $f(x) = 8x$ et pour $x \in [0{,}25; 1]$, $f(x) = \dfrac{8}{3}(1 - x)$.
   Vérifier alors par le calcul que $E(X) = \dfrac{5}{12}$.
3. On admet que $E(X^2) = \dfrac{7}{32}$. Donner une valeur approchée au millième de l'écart-type de X.

Exercice 4 : (6 points) *D'après la loi fédérale en vigueur à Flint, lorsque plus de 10% des tests de l'eau présentent des taux de plomb trop élevés (supérieurs à 15ppb) une alerte est lancée.*
Des études de l'eau indépendantes ont montrées qu'en juillet 2015, il y avait 22% des prélèvements qui présentaient des taux trop élevés. Pourtant aucune alerte n'a été lancée.
On va prendre comme hypothèse qu'un test a une probabilité égale à 22% d'être positif (positif = concentration en plomb trop élevée), et que les tests sont indépendants (canalisations différentes).
On appelle X la variable aléatoire comptant le nombre de tests positifs sur 71 tests indépendants effectués.

1. Quelle est la loi suivie par X ? Justifier.
2. Peut-on approcher la loi de X par une autre loi ? Si oui, laquelle ? Justifier dans les deux cas.
3. Donner une valeur approchée, à 0,1% près, de $P(X \leq 8)$.
4. Donner un intervalle de pari (ou fluctuation) de la fréquence observée $\frac{X}{71}$ au risque de 5%. Justifier les calculs.
5. A l'aide des deux réponses précédentes, que peut-on penser des résultats obtenus à Flint : 8 tests positifs ?
   Remarque : pour passer en dessous des 10%, 2 résultats positifs ont été enlevés (dont un à 100ppb !) , ce qui faisait 6 sur 69 positifs.
   Source : http ://fivethirtyeight.com/features/what-went-wrong-in-flint-water-crisis-michigan/

Exercice 5 : (2 points) Un sondage réalisé auprès de 949 personnes le 15 avril 2016 donne Hollande perdant contre Le Pen au second tour de la présidentielle avec un score de 47% contre 53%.
Donner un intervalle de confiance à 95% sur la proportion des personnes qui préfère Hollande à Le Pen.
Peut-on affirmer, avec un risque de 5%, que Hollande aurait perdu l'élection si elle avait eu lieu ce jour-là ?
Justifier vos réponses.

Exercice 6 : (2 points) Bob prétend que sa pièce est équilibrée. Il la lance 25 fois et elle tombe 6 fois sur face.
Proposer un test de normalité sur 25 lancers, et conclure à l'aide de ce test.

Correction de l'examen de mai 2016 SV L1 S2

Exercice 1 : 1. On donne la loi de Z sous forme d'un tableau. Z peut prendre les valeurs 0, 1 et 2. Puisque X et Y sont indépendantes, les événements $X = 0$ et $Y = 0$ dont indépendants etc.

z_i	0	1	2
$P(Z = z_i)$	$P(X = 0) \times P(Y = 0) = 0,5 \times 0,9 = 0,45$	$0,5$	$P(X = 1) \times P(Y = 1) = 0,05$

On a $E(Z) = E(X) + E(Y)$ (linéarité de l'espérance) donc $\boxed{E(Z) = 0,6}$.
Comme X et Y sont indépendantes, $V(Z) = V(X) + V(Y) = 0,5^2 + 0,9 \times 0,1 = 0,34$

2.

$X \backslash Z$	0	1	2
0	$0,45$	$0,25$	0
1	0	$0,25$	$0,05$

3. On a $P(X = 1 \cap Z = 0) = 0$ or $P(X = 1) \times P(Z = 0) \neq 0$ donc les variables X et Z ne sont pas indépendantes. On peut aussi trouver ce résultat en calculant le coefficient de corrélation qui n'est pas nul.
4. $cov(X, Z) = E(XZ) - E(X)E(Z) = 1 \times 0,25 + 2 \times 0,05 - 0,5 \times 0,6 = 0,05$.
D'autre part $V(X) = 0,25$ et $V(Z) = 0,34$.
Le coefficient de corrélation vaut donc $\rho(X, Z) = \frac{0,05}{\sqrt{0,25 \times 0,34}} \approx 0,1715$

Exercice 2 : $P(X \leq 15) \approx 0,9772$. $P(X \geq 7) \approx 0,9772$. $P(X \leq 9) \approx 0,1587$.

Exercice 3 : 1. $P(X \geq 2) = 0$, $P(X \leq 0,25) = 2 \times 0,25 \times \frac{1}{2} = 0,25$ (aire d'un triangle).
$P(X \geq 0,5) = \frac{4}{3} \times 0,5 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \approx 0,333$ (aire d'un triangle, la hauteur est calculée avec une règle de 3).

2.

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx = \int_0^1 xf(x)\,dx = \int_0^{0,25} 8x^2\,dx + \int_{0,25}^1 \frac{8}{3}(x - x^2)\,dx \\ &= \left[\frac{8}{3}x^3\right]_0^{0,25} + \left[\frac{8}{3}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\right]_{0,25}^1 = \frac{8}{3}\left(\frac{1}{4^3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2 \times 4^2} + \frac{1}{3 \times 4^3}\right) = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

3. On a $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{7}{32} - \frac{25}{144} = \frac{13}{288}$. D'où $\sigma(X) = \sqrt{\frac{13}{288}} \approx 0,212$

Exercice 4 : 1. Il s'agit d'une loi binomiale puisqu'on réalise 71 expériences indépendantes identiques à deux issues (positif ou non) et on compte le nombre de résultats positifs sans se préoccuper de l'ordre de ces résultats. Les paramètres sont $n = 71$ et $p = 0,22$.

2. On a $n > 30$, $np = 71 \times 0,22 \approx 15,6 > 15$ et $npq \approx 12,2 > 5$, donc on peut approcher la loi de X par la loi normale de paramètre 15,6 et de variance égale à 12,2.
3. Soit Y qui suit une loi normale de paramètre $12,2$ et $15,6$, on a $P(X \leq 8) \approx P(Y \leq 8,5) \approx 2,1\%$. Le calcul exact donne en fait environ $1,5\%$ et le calcul sans la correction de continuité donne $1,45\%$ (plus précis qu'avec!!!).
4. L'intervalle de fluctuation à 95% est $[p - t\sqrt{\frac{pq}{n}}; p - t\sqrt{\frac{pq}{n}}]$, avec $t = 1,96$, c'est à dire environ $[12,4\%; 31,6\%]$.
5. 8 tests sur 11 donne une fréquence de 11,2%, ce qui n'est pas dans l'intervalle de pari à 95% de confiance. Il est vraisemblable que ces tests n'ont pas été faits avec le même soin que les tests indépendants. De toutes façon certains taux relevés étaient déjà alarmants.

Exercice 5 : On a cette fois ci $n = 949$, mais p (proportion des gens préférant Hollande dans la population française) est inconnu. On a relevé que, dans l'échantillon, la fréquence f est égale à 47%.
On peut établir un intervalle de confiance à 95% qui vaut $[f - \frac{t}{2\sqrt{n}}, f + \frac{t}{2\sqrt{n}}]$ avec $t = 1,96$. On trouve $[43,8\%; 50,2\%]$, donc, comme l'intervalle contient 50%, on ne peut pas affirmer avec un risque de 5% que Hollande aurait perdu contre Le Pen.

Exercice 6 : On part de l'hypothèse que la pièce est équilibrée, et donc on a $p = 0,5$. On construit un test bilatéral. On trouve un intervalle de fluctuation à 95% égal à $[32\%, 68\%]$.
Le test consiste alors à regarder si la fréquence observée est comprise entre ces deux bornes ou non. Ici, on a $f = \frac{6}{25} = 24\%$, on est donc largement en dehors de l'intervalle de fluctuation. On peut donc affirmer, au risque de 5%, que la pièce n'est pas équilibrée.

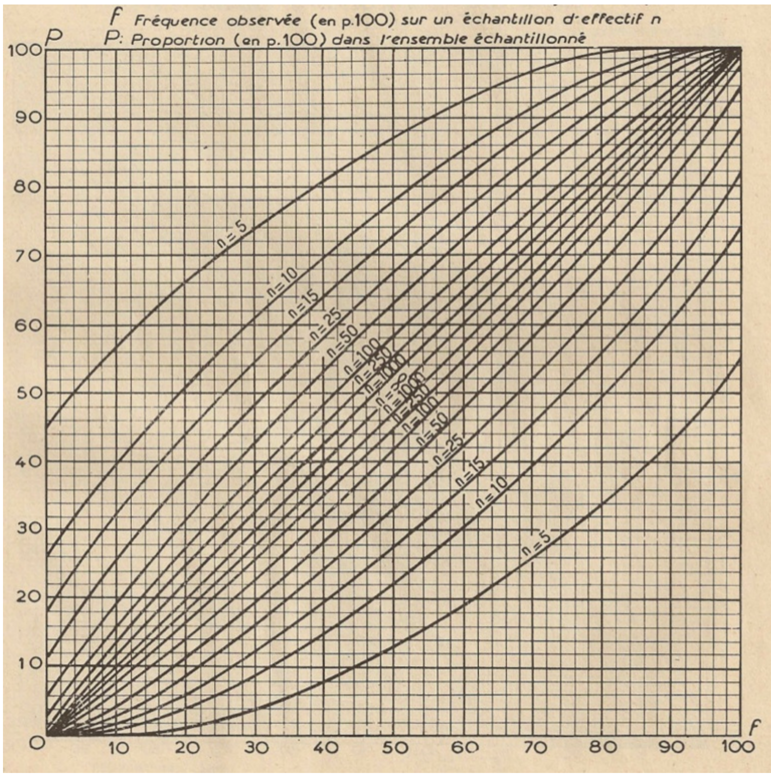


Table loi normale centrée réduite.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998