Mathématiques pour les Sciences
L1-SV-S2
2013-2014

Examen du 14 Mai 2014 - Corrigé

Premier Exercice

1. On a $\mathbb{P}(G) = 0,5$, $\mathbb{P}(F) = 0,5$, $\mathbb{P}(E|G) = 0,25$ et $\mathbb{P}(E|F) = 0,44$
2. (a) D'après la formule des probabilités totales : $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E|F)\mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(E|G)\mathbb{P}(G) = 0,345$.

   (b) D'après la formule de Bayes : $\mathbb{P}(F|E) = \frac{\mathbb{P}(E|F)\mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(E)} = 0,637$.

   (c) On cherche $\mathbb{P}(F|\bar{E})$. D'après la formules de Bayes : $\mathbb{P}(F|\bar{E}) = \frac{\mathbb{P}(\bar{E}|F)\mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(\bar{E})}$. On a $\mathbb{P}(\bar{E}|F) = 1 - \mathbb{P}(E|F) = 0,56$ et $\mathbb{P}(\bar{E}) = 1 - \mathbb{P}(E) = 0,655$. D'où $\mathbb{P}(F|\bar{E}) = 0,427$.

   (d) $\mathbb{P}(G|\bar{E}) = \frac{\mathbb{P}(\bar{E}|G)\mathbb{P}(G)}{\mathbb{P}(\bar{E})} = 0,572$.

Second Exercice

1. La loi suivie est une loi hypergéométrique $\mathcal{H}(n, N_1, N_2)$ avec $N_1 = 35$, $N_2 = 15$, $N = N_1 + n_2 = 50$ et $n = 10$. Pour $k \in \{0, 1, 2, 3, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, on a $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{N_1}{k}\binom{N-N_1}{n-k}}{\binom{N}{n}}$.
2. On pose $p = \frac{N_1}{N} = \frac{7}{10}$ et $q = 1 - p = \frac{3}{10}$. Alors $\mathbb{E}(X) = np = 7$ et $V(X) = npq\frac{N-n}{N-1} = \frac{12}{7} = 1,71$.

Troisième Exercice

1. Les lois marginales sont données dans le tableau :

$Y \setminus X$	1	2	3	4	Loi de Y
1	$\frac{29}{210}$	$\frac{28}{210}$	$\frac{27}{210}$	$\frac{26}{210}$	$\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{110}{210}$
2	$\frac{28}{210}$	$\frac{26}{210}$	$\frac{24}{210}$	$\frac{22}{210}$	$\mathbb{P}(Y = 2) = \frac{100}{210}$
Loi de X	$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{57}{210}$	$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{54}{210}$	$\mathbb{P}(X = 3) = \frac{51}{210}$	$\mathbb{P}(X = 4) = \frac{40}{210}$	1

2. On a $\mathbb{P}(X = 1 \text{ et } Y = 1) = \frac{29}{210} = 0,138$ et $\mathbb{P}(X = 1) \times \mathbb{P}(Y = 1) = \frac{57}{210} \times \frac{110}{210} = 0,142$. Les variables X et Y ne sont donc pas indépendantes.
3. $\mathbb{E}(X) = 1 \times \frac{57}{210} + 2 \times \frac{54}{210} + 3 \times \frac{51}{210} + 4 \times \frac{48}{210} = \frac{510}{210} = 2,428$.
   $\mathbb{E}(Y) = 1 \times \frac{110}{210} + 2 \times \frac{100}{210} = \frac{310}{210} = 1,476$.
   Pour calculer la variance, on utilise la formule $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$. On a :
   $\mathbb{E}(X^2) = 1 \times \frac{57}{210} + 4 \times \frac{54}{210} + 9 \times \frac{51}{210} + 16 \times \frac{48}{210} = \frac{1500}{210} = 7,14$. D'où $V(X) = 7,14 - 5,76 = 1,24$.
   $\mathbb{E}(Y^2) = 1 \times \frac{110}{210} + 4 \times \frac{100}{210} = \frac{510}{210} = 2,43$, d'où $V(Y) = 2,43 - 2,19 = 0,24$.

4. $Cov(X,Y) = \mathbb{E}(X.Y) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. La variable aléatoire $X.Y$ prend les valeurs $1, 2, 3, 4, 6, 8$. On va déterminer la loi de la variable $X.Y$.
$\mathbb{P}(X.Y = 1) = \mathbb{P}(X = 1 \text{ et } Y = 1) = \frac{29}{210}$
$\mathbb{P}(X.Y = 2) = \mathbb{P}(X = 1 \text{ et } Y = 2) + \mathbb{P}(X = 2 \text{ et } Y = 1) = \frac{56}{210}$
$\mathbb{P}(X.Y = 3) = \mathbb{P}(X = 3 \text{ et } Y = 1) = \frac{27}{210}$
$\mathbb{P}(X.Y = 4) = \mathbb{P}(X = 2 \text{ et } Y = 2) + \mathbb{P}(X = 2 \text{ et } Y = 1) = \frac{52}{210}$
$\mathbb{P}(X.Y = 6) = \mathbb{P}(X = 3 \text{ et } Y = 2) = \frac{24}{210}$
$\mathbb{P}(X.Y = 8) = \mathbb{P}(X = 4 \text{ et } Y = 2) = \frac{22}{210}$
On obtient $\mathbb{E}(X.Y) = 1\times\frac{29}{210} + 2\times\frac{56}{210} + 3\times\frac{27}{210} + 4\times\frac{52}{210} + 6\times\frac{24}{210} + 8\times\frac{22}{210} = \frac{750}{210} = 3,5714$ et $Cov(X,Y) = 3,5714 - 2,428 \times 1,476 = -0,011$.

Quatrième Exercice

1. Il y a 20 employés dans l'entreprise.
2. On reprend les données en ajoutant les effectifs cumulés :

Nombres de jours d'absence	0	1	2	3	4	5	7	10
Effectif	3	5	2	2	3	3	1	1
Effectifs cumulés	3	8	10	12	15	18	19	20

L'effectif est pair. Le 10 ième élément a pour valeur 2. Le 11 ième élément a pour valeur 3. La médiane est donc égale à $\frac{2+3}{2} = 2,5$.

3. On a $\frac{20}{4} = 5$. Le premier quartile Q_1 est la valeur du 5 ième terme, c'est-à-dire $Q_1 = 1$. On obtient ensuite $3 \times \frac{50}{4} = 15$. On en déduit que le troisième quartile Q_3 est la valeur du 15 ième terme, c'est-à-dire $Q_3 = 4$. L'écart interquartile est donné par $Q_3 - Q_1 = 3$.
4. Pour représenter la boîte à moustaches de la série, on commence par chercher s'il y a des valeurs exceptionnelles. On a $[Q_1 - 1,5(Q_3 - Q_1); Q_3 + 1,5(Q_3 - Q_1)] = [-3,5; 8,5]$. On a donc 1 valeurs exceptionnelles : 10. Pour représenter la boîte à moustaches, on prendra comme valeur minimale 0 et comme valeur maximale 7.

FIGURE 1 – Boîtes à moustache