Mathématiques pour les Sciences
L1-SV-S2
2012-2013

Examen du 16 Mai 2013 - Corrigé

Premier Exercice

1. On note M_1 l'événement "prendre le médicament $M1$", M_2 l'événement "prendre le médicament $M2$" et S l'événement "être soulagé". D'après l'énoncé, on a : $\mathbb{P}(M_1) = \frac{3}{5}$, $\mathbb{P}(M_2) = \frac{2}{5}$, $\mathbb{P}(S/M_1) = 0,75$ et $\mathbb{P}(S/M_2) = 0,9$. On cherche $\mathbb{P}(S)$. La formule de probabilités totales donne : $\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(S/M_1) \times \mathbb{P}(M_1) + \mathbb{P}(S/M_2) \times \mathbb{P}(M_2)$. D'où $\mathbb{P}(S) = 0,81$.
2. On cherche $\mathbb{P}(M_1/S)$. On utilise la formule de Bayes : $\mathbb{P}(M_1/S) = \frac{\mathbb{P}(S/M_)\mathbb{P}(M_1)}{\mathbb{P}(S)}$. On obtient $\mathbb{P}(M_1/S) = 0,55$.

Second Exercice

1. La loi suivie est une loi hypergéométrique $\mathcal{H}(n, N_1, N_2)$ avec $N_1 = N_2 = 10$, $n = 5$ et $N = N_1 + N_2 = 20$. Pour $k \in \{0, 1, 2, 3, 3, 5\}$, on a $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{N_1}{k}\binom{N-N_1}{n-k}}{\binom{N}{n}}$. On pose $p = \frac{N_1}{N} = \frac{1}{2}$ et $q = 1 - p = \frac{1}{2}$. Alors $\mathbb{E}(X) = np = \frac{5}{2}$ et $V(X) = npq\frac{N-n}{N-1} = 0,98$.
2. Pour que l'échantillon ne contienne que des roches de même type, on doit avoir soit 5 roches de type basalte, soit 5 roches de type granit. On cherche donc $\mathbb{P}(X = 5) + \mathbb{P}(X = 0)$. On a $\mathbb{P}(X = 5) = \frac{\binom{10}{5}\binom{10}{0}}{\binom{20}{5}} = 0,162$ et $\mathbb{P}(X = 0) = \frac{\binom{10}{0}\binom{10}{5}}{\binom{20}{5}} = 0,162$. La probabilité recherchée est $2 \times 0,0162 = 0,0324$.

Troisième Exercice

1. La variable aléatoire X prend les valeurs $-1, 0, 1, 2$. La loi marginale de X est donnée par

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = -1) &= 0,02 + 0,03 + 0,05 = 0,1\\
\mathbb{P}(X = 0) &= 0,06 + 0,01 + 0,23 = 0,3\\
\mathbb{P}(X = 1) &= 0,01 + 0,05 + 0,25 = 0,4\\
\mathbb{P}(X = 2) &= 0,02 + 0,01 + 0,17 = 0,2
\end{aligned}$$

La variable aléatoire Y prend les valeurs $-1, 0, 1$. La loi marginale de Y est donnée par

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y = -1) &= 0,02 + 0,06 + 0,1 + 0,02 = 0,2\\
\mathbb{P}(Y = 0) &= 0,03 + 0,01 + 0,05 + 0,01 = 0,1\\
\mathbb{P}(Y = 1) &= 0,05 + 0,023 + 0,25 + 0,17 = 0,7
\end{aligned}$$

2. On a $\mathbb{P}(X = 1 \text{ et } Y = 1) = 0,35$ et $\mathbb{P}(X = 1) \times \mathbb{P}(Y = 1) = 0,4 \times 0,7 = 0,28$. Les variables X et Y ne sont donc pas indépendantes.
3. $\mathbb{E}(X) = -1 \times 0,1 + 0 \times 0,3 + 1 \times 0,4 + 2 \times 0,2 = 0,7$.
   $\mathbb{E}(Y) = -1 \times 0,2 + 0 \times 0,1 + 1 \times 0,7 = 0,5$.
   Pour calculer la variance, on utilise la formule $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$. On a :
   $\mathbb{E}(X^2) = 0,1 + 0,4 + 4 \times 0,2 = 1,3$, d'où $V(X) = 1,3 - (0,7)^2 = 0,81$ et
   $\mathbb{E}(Y^2) = 0,2 + 0,7 = 0,9$, d'où $V(Y) = 0,9 - (0,5)^2 = 0,65$.
4. $Cov(X,Y) = \mathbb{E}(X.Y) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. La variable aléatoire $X.Y$ prend les valeurs $-2, -1, 0, 1, 2$.On va déterminer la loi de la variable $X.Y$.
   $\mathbb{P}(X.Y = -2) = \mathbb{P}(X = 2 \text{ et } Y = -1) = 0,02$
   $\mathbb{P}(X.Y = -1) = \mathbb{P}(X = 1 \text{ et } Y = -1) + \mathbb{P}(X = -1 \text{ et } Y = 1) = 0,1$
   $\mathbb{P}(X.Y = 0) = \mathbb{P}(X = 0 \text{ et } Y = -1) + \mathbb{P}(X = 0 \text{ et } Y = 0) + \mathbb{P}(X = 0 \text{ et } Y = 1) + \mathbb{P}(X = -1 \text{ et } Y = 0) + \mathbb{P}(X = 1 \text{ et } Y = 0) + \mathbb{P}(X = 2 \text{ et } Y = 0) = 0,39$
   $\mathbb{P}(X.Y = 1) = \mathbb{P}(X = -1 \text{ et } Y = -1) + \mathbb{P}(X = 1 \text{ et } Y = 1) = 0,27$
   $\mathbb{P}(X.Y = 2) = \mathbb{P}(X = 2 \text{ et } Y = 1) = 0,17$
   On obtient $\mathbb{E}(X.Y) = -2 \times 0,02 - 1 \times 0,15 + 0,27 + 2 \times 0,17 = 0,42$ et $Cov(X,Y) = 0,42 - 0,7 \times 0,5 = 0,07$.
5. On a $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = 1,2$ et $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X,Y) = 1,6$

Quatrième Exercice

1. 50 ordinateurs sont proposés dans le magasin.
2. On reprend les données en ajoutant les effectifs cumulés :

Capacité en Go	10	20	50	80	160	250	320	500	800	1000	1150
Effectifs	2	4	5	12	10	7	2	4	1	2	1
Effectifs cumulés	2	6	11	23	33	40	42	46	47	49	50

   L'effectif est pair. Le 25 ième élément a pour valeur 160. Le 26 ième élément a aussi pour valeur 160. La médiane est donc égale à 160.
3. On a $\frac{50}{4} = 12,5$. Le premier quartile Q_1 est la valeur du 13 ième terme, c'est-à-dire $Q_1 = 80$. On obtient ensuite $3 \times \frac{50}{4} = 37,5$. On en déduit que le troisième quartile Q_3 est la valeur du 38 ième terme, c'est-à-dire $Q_3 = 250$. L'écart interquartile est donné par $Q_3 - Q_1 = 170$.
4. Pour représenter la boîte à moustaches de la série, on commence par chercher s'il y a des valeurs exceptionnelles. On a $[Q_1 - 1,5(Q_3 - Q_1); Q_3 + 1,5(Q_3 - Q_1)] = [-175; 505]$. On a donc 3 valeurs exceptionnelles : 800,1000 et 1150. Pour représenter la boîte à moustaches, on prendra comme valeur minimale 10 et comme valeur maximale 500.

FIGURE 1 – Boîtes à moustache