L1-SV
12 Mai 2011
Mathématiques

UNIVERSITÉ de Cergy-Pontoise

Examen

Durée: 2h. Aucun document ni calculatrice autorisé.
Tout résultat non justifié sera considéré comme faux.
La Feuille Annexe est à rendre avec la copie.

Exercices de cours.
a) Soit f la fonction définie par $f(x,y) = yx^2 + 2x^3y^2 + 1$. Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, puis le vecteur gradient de f au point $(1,2)$.
b) Que vaut la somme $u_0 + u_1 + \cdots + u_{40}$ si $(u_n)_n$ est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison -1. Même question si $(u_n)_n$ est cette fois une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison -1.
c) Dans chacun des cas suivants, dire si le produit de matrices a un sens (justifier). Si oui, le calculer.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 7 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1. Soit f la fonction définie par $f(x,y) = \ln(4 - x^2 - y^2)$.
a) Déterminer son ensemble de définition et le représenter graphiquement.
b) Déterminer la courbe de niveau 0 de f et la représenter graphiquement.
c) Montrer que la fonction f possède une unique point critique que l'on précisera.
d) Est-ce que ce point critique correspond à un minimum, un maximum ou un point col?

Exercice 2. On s'intéresse à l'évolution d'une population. On notera u_n le nombre d'individus exprimé en milliers dans la population au temps n. On suppose que le taux de croissance de la population est $\frac{4}{3}(1 - u_n)$. L'évolution de la population est donc donnée par

$$u_0 \in]0,1], \quad u_{n+1} = \frac{4}{3}(1 - u_n)\, u_n.$$

Dans la suite on notera f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \frac{4}{3}(1-x)\,x$. Ainsi $u_{n+1} = f(u_n)$.
a) Calculer f' et faire un tableau de variations de f sur $[0,1]$.
b) Tracer le graphe de f sur la “Feuille Annexe”.
c) Justifier que si $0 \leq x \leq 1$ alors $0 \leq f(x) \leq 1$ (Indication: quelle est la valeur maximum de la fonction f?). Que peut-on en déduire sur le nombre d'individus dans la population?
d) Déterminer les points fixes de f et étudier leur stabilité.
e) Que peut-on dire de la suite $(u_n)_n$ si $u_0 = \frac{1}{4}$?
f) On suppose que $u_0 < \frac{1}{4}$.

i) Montrer par récurrence que pour tout n on a $0 < u_n < \frac{1}{4}$. Indication: en utilisant le sens de variation de f sur $[0, \frac{1}{4}]$ comparer $f(x)$ et $f(\frac{1}{4})$.

TSVP

ii) Montrer que la suite $(u_n)_n$ est croissante.

iii) En déduire que la suite $(u_n)_n$ converge. Quelle est sa limite?

g) On prend cette fois $u_0 = \frac{1}{2}$. Représenter graphiquement (sur le même graphe qu'à la question **b)**) les termes u_1, u_2, u_3 et u_4. A l'aide du graphe déterminer le comportement de la suite $(u_n)_n$ lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 3. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par récurrence par $u_0 = 1$, $v_0 = 6$ et $\left\{\begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & u_n + 3v_n, \\ v_{n+1} & = & 4u_n - 3v_n. \end{array}\right.$

a) Ecrire le système sous la forme $U_{n+1} = AU_n$ où A est une matrice que l'on déterminera et $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, puis exprimer U_n en fonction de U_0, A et n.

b) Trouver des nombres α et α' et des vecteurs $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $V' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tels que $AV = \alpha V$ et $AV' = \alpha' V'$. On appellera α la plus petite valeur trouvée et α' la plus grande.

c) Exprimer U_0 sous la forme $U_0 = aV + bV'$ où a et b sont des nombres réels.

d) En déduire l'expression de U_n en fonction de n, puis celles de u_n et v_n.