Université de Cergy-Pontoise

Mathématiques SVS2

EXAMEN FINAL
Epreuve du 18 mai 2010
Durée : 2 heures
L'usage de tout document ou calculatrice est interdit.
Le devoir est noté sur 20 points.

Exercice 1 –(sur 4 points)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par

$$u_0 = 4,\ v_0 = 3, \quad u_{n+1} = \frac{1}{5}(3u_n + 2v_n),\ \ v_{n+1} = \frac{1}{5}(2u_n + 3v_n),\ \ n \geq 0.$$

Démontrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

Exercice 2 –(sur 6 points)

Soit la fonction à deux variables f définie par

$$f(x, y) = \cos(x^2 + y^2)\,.$$

1) Calculer

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y),\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y),\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)\,.$$

2) On pose

$$D = ((x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq \frac{\pi}{2}).$$

Calculer

$$\int\int_D f(x, y)dxdy\,.$$

Exercice 3 –(sur 5 points)

1) Soit les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -7 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^t et AB.

2) Soit la matrice

$$C = \begin{pmatrix} x^3 - x^2 & 1 \\ x - 1 & 1 \end{pmatrix},$$

où x est un paramètre réel. Pour quelles valeurs de x la matrice C est inversible ? Dans ce cas calculer C^{-1}.

Exercice 4 –(sur 5 points)

1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = 2, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1,\ n \geq 0.$$

Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite
2) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$v_0 = 3, \quad v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + 1,\ n \geq 0.$$

Démontrer que $v_n = 2 + 2^{-n}$.