
Devoir Maison 1

SVS2

Exercice 1

Calculer les limites des suites suivantes :

1. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
2. $u_n = \frac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n}$
3. $u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$ avec $a, b > 0$

Exercice 2

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n(1 - u_n) \\ u_0 \in]0, 1[\end{cases}$$

1. Etudier la fonction $f : x \mapsto x(1 - x)$ sur l'intervalle $[0, 1]$
2. Montrer que (u_n) est décroissante
3. Montrer que (u_n) est minorée par 0
4. Donner la limite de (u_n)

Exercice 3

Approche du nombre π

On considère dans le plan un cercle \mathcal{C} de rayon 1. Soit $n \geq 3$, on appelle \mathcal{I}_n le polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle \mathcal{C} et \mathcal{C}_n le polygone régulier à n côtés circonscrit au cercle \mathcal{C} .

1. Faire un dessin pour $n = 6$.
2. Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $AB = 1$ et $\widehat{ABC} = \alpha$. Calculer la longueur du segment $[BC]$ en fonction de α (On n'hésitera pas à faire un dessin).
3. En déduire p_n le périmètre de \mathcal{I}_n .
4. Soit ABC un triangle isocèle en A tel que la hauteur issue de A coupe (BC) en H et $AH = 1$. Calculer la longueur du segment $[BC]$ en fonction de α (ici encore, on pourra faire un dessin).
5. En déduire le périmètre q_n de \mathcal{C}_n .
6. Montrer que les fonctions $x \mapsto \frac{\tan(x)}{x}$ et $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ sont respectivement croissante et décroissante sur $[0, \pi[$.
7. En déduire que les suites (p_n) et (q_n) sont adjacentes. Conclure.
8. En prenant $n = 3, 4, 6, 12$, calculer des approximations successives de π .