Contrôle Continu

SV-S2-Groupe H

Durée : 1 heure
Documents, calculatrices, et téléphones portables interdits !

Exercice 1

Soient (u_n) et (v_n) les suites définies par :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= \dfrac{3u_n + v_n}{4} \\ u_0 &= 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{n+1} &= \dfrac{2u_n + v_n}{3} \\ v_0 &= 1 \end{cases}$$

1. Soit (z_n) la suite définie par $z_n = u_n - v_n$. Montrez que (z_n) est géométrique et donnez sa raison.
2. Donnez la limite de (z_n) et l'expression de z_n en fonction de n.
3. Exprimez $u_{n+1} - u_n$ en fonction de z_n et montrez que (u_n) est décroissante.
4. Montrez de même que (v_n) est croissante.
5. En déduire que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
6. Exprimez u_n et v_n en fonction de n et donnez leur limite commune.

Exercice 2

Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \text{ et } f(0,0) = 0$$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Montrez que $f(x,y)$ n'a pas de limite quand $(x,y) \to (0,0)$. Ainsi f n'est pas continue en 0.
3. Montrez que, néanmoins, f est continue séparément par rapport à chaque variable, y compris en 0.
4. Montrez que les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existent et calculez-les.
5. Soit (a,b) un point de $\mathbb{R}^2$ autre que $(0,0)$. Montrez que les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ existent et calculez-les.
6. Soit D l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $D(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$. L'application D admet-elle une limite en $(0,0)$?