Université de Cergy-Pontoise
Année 2009

Examen SV 2H

Exercice 1 : Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < a < b$, $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles définies par :

$$\begin{cases} u_0 = a \text{ et } v_0 = b, \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \text{ et } v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(1) Montrer que $u_n > 0$ et $v_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

(2) Montrer que $u_n < v_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(3) Montrer que la suite $(w_n)_n$ définie par le terme général $w_n = v_n - u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ vérifie :
$$w_{n+1} \leq \frac{1}{2} w_n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

(4) En déduire la limite de la suite $(w_n)_n$.

(5) Montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.

(6) Calculer $u_n v_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont-elles convergentes, et si oui, déterminer leur limite.

Exercice 2 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y.$$

(1) Calculer les points critiques de f.

(2) Donner la nature de ces points.

(3) En posant $u = x$ et $v = y - 3$ montrer que
$$f(x,y) - f(0,3) = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + (u+v)^2.$$

(4) Conclure.

Exercice 3 :

(1) Représenter $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ x \leq 1, \ , y \geq 0 \text{ et } y^2 \leq x\}$.

(2) Calculer l'intégrale double :
$$\int\int_\Delta xy^2 dxdy.$$

Exercice 5 : Soit
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) Calculer les valeurs propres de A et un vecteur propre pour chaque valeur propre dont la premiere composante sera 1.

(2) Soit P la matrice dont les vecteurs colonnes sont les vecteurs propres. Calculer $D = P^{-1}AP$. En déduire A^n.