2022-2023
L1 Licence de PCST
S2 Mathématiques

Examen - Session 1 - mai 2023

Durée : 3h00. Aucun document est autorisé

Exercice 1 : Questions diverses

a. Dans un groupe, 25% des familles ont un enfant, 40% ont deux enfants, 20% ont trois enfants et 15% ont quatre enfants. Quel est le nombre moyen d'enfants dans ce groupe ? Quel est la médiane ?
Le nombre moyen d'enfant est $0,25 \times 1 + 0,40 \times 2 + 0,20 \times 3 + 0,15 \times 4 = 2,25$. La médiane est 2.

b. Résoudre l'équation différentielle $\quad x^2y'(x) - (2x-1)y(x) = 0$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

$$x^2y' - (2x-1)y = 0 \iff x^2y' = (2x-1)y \iff \frac{y'}{y} = \frac{2x-1}{x^2} \iff \frac{y'}{y} = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$$

Donc, à une constante près, ces deux fonctions de x ($\frac{y'(x)}{y(x)}$ et $\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$) ont la même primitive. On en déduit que $\ln(y) = 2\ln(x) + \frac{1}{x} + C$ où C est une constante. Alors

$$y = e^{2\ln(x)+\frac{1}{x}+C} = e^{\ln(x^2)} \times e^{\frac{1}{x}} \times e^C = Kx^2e^{\frac{1}{x}} \quad \text{avec} \quad K = e^C$$

c. Calculer i^{2023}. $i^2 = -1$ Donc $\quad i^{2023} = i^{2\times1011+1} = (i^2)^{1011} \times i^1 = (-1)^{1011} \times i = -i$

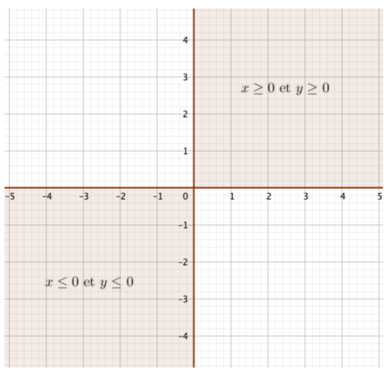
Exercice 2 : On considère les fonctions suivantes

$$f(x;y) = 2\sqrt{xy} \quad \text{et} \quad g(x;y) = \ln(x)\sqrt{xy}$$

a. Donner les valeurs exactes de $f(-18\ ;-2)$ et $g(18\ ;\ 2)$.
$f(-18\ ;-2) = 2\sqrt{(-18)\times(-2)} = 2\sqrt{36} = 12$ et
$g(18\ ;2) = \ln(18) \times \sqrt{18\times 2} = \ln(18) \times \sqrt{36} = 6\ln(18)$.

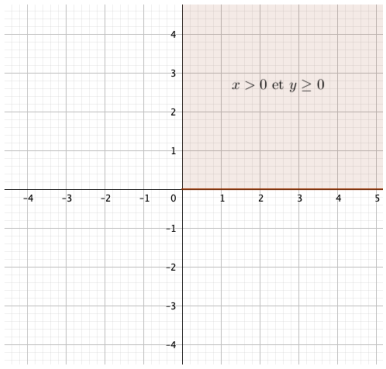
b. Déterminer, puis dessiner le domaine de définition de f et celui de g.
Le point $(x;y)$ appartient au domaine de définition de f ssi $xy \geq 0$. Or

$$xy \geq 0 \iff \text{“ } x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \text{ ” ou “ } x \leq 0 \text{ et } y \leq 0 \text{ ”}$$



Le point $(x;y)$ appartient au domaine de définition de g ssi $x > 0$ et $xy \geq 0$. Donc

$$(x;y) \in \mathcal{D}_g \iff \text{“ } x > 0 \text{ et } y \geq 0 \text{ ”}$$



c. Calculer les dérivées partielles f'_x, f'_y et g'_x.
Ecrivons $f(x;y) = 2(xy)^{\frac{1}{2}}$. Alors

$$f'_x(x;y) = 2 \times \frac{1}{2}(xy)^{-\frac{1}{2}} \times y = \frac{y}{\sqrt{xy}}$$

$$f'_y(x;y) = 2 \times \frac{1}{2}(xy)^{-\frac{1}{2}} \times x = \frac{x}{\sqrt{xy}}$$

De même, écrivons $g(x) = \ln(x)(xy)^{\frac{1}{2}}$. Alors

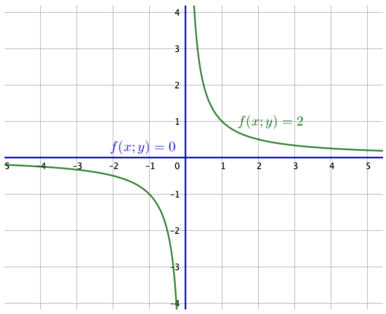
$$g'_x(x;y) = \frac{1}{x} \times (xy)^{\frac{1}{2}} + \ln(x) \times \frac{1}{2} \times (xy)^{-\frac{1}{2}} \times y = \frac{\sqrt{xy}}{x} + \frac{\ln(x)}{2}\frac{y}{\sqrt{xy}}$$

d. Déterminer, puis dessiner les courbes de niveaux $f(x;y) = 0$ et $f(x;y) = 2$.
On cherche les points de coordonnées $(x;y)$ tels que $f(x;y) = 0$. Or

$$f(x;y) = 0 \;\Leftrightarrow\; 2\sqrt{xy} = 0 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{xy} = 0 \;\Leftrightarrow\; xy = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \text{ ou } y = 0$$

De même on cherche les points de coordonnées $(x;y)$ tels que $f(x;y) = 2$. Or

$$f(x;y) = 2 \;\Leftrightarrow\; 2\sqrt{xy} = 2 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{xy} = 1 \;\Leftrightarrow\; xy = 1 \;\Leftrightarrow\; y = \frac{1}{x}$$



e. Donner une valeur approchée de $f(-17,7\,;-2,2)$.
D'après le cours une valeur approchée de $f(x;y)$ au voisinage de $(x_0;y_0)$ est donnée par la formule

$$f(x;y) \approx f(x_0,y_0) + (x-x_0)f'_x(x_0;y_0) + (y-y_0)f'_y(y-y_0)$$

Donc au voisinage de $(-18;-2)$ on a

$$\begin{aligned} f(-17,7\,;-2,2) \approx\; & f(-18;-2) + (-17,7-(-18)) \times f'_x(-18;-2) + (-2,2-(-2)) \times f'_y(-18;-2) \\ \approx\; & f(-18;-2) + 0,3 \times f'_x(-18;-2) - 0,2 \times f'_y(-18;-2) \end{aligned}$$

Dans question **a.** nous avons calculer $f(-18;-2) = 12$. Puis dans la réponse à la question **c.**, on a $f'_x(-18;-2) = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$ et $f'_y(-18;-2) = \frac{-18}{6} = -3$.
Finalement $\boxed{f(-17,7\,;-2,2) \approx 12 - 0,1 + 0,6 = 12,5}$.

f. Donner une équation du plan tangent à la surface S_f en point $(-18; -2; f(-18, -2))$.
Une équation cartésienne du plan tangent à la surface S_f en point $(x_0, y_0, f(x_0; y_0))$ est $z = f(x_0; y_0) + (x - x_0)f'_x(x_0; y_0) + (y - y_0)f'_y(x_0; y_0)$. Donc on obtient

$$\begin{aligned} z = & \quad f(-18; -2) + (x - (-18)) \times f'_x(-18; -2) + (y - (-2)) \times f'_y(-18; -2) \\ = & \quad 12 + (x + 18) \times \tfrac{-1}{3} + (y + 2) \times (-3) \end{aligned}$$

On a donc $z = -\frac{1}{3}x - 3y$ ou plus plus élégant $\boxed{x + 9y + 3z = 0}$.

Exercice 3 :

a. Montrer que la fonction f définie par $f(x) = (3x - 2)e^x$ est une solution de l'équation différentielle $y'' + 4y' + 4y = 27xe^x$.

$$\begin{aligned} f'(x) = 3e^x + (3x - 2)e^x = 3e^x + 3xe^x - 2e^x \quad &\Longrightarrow \quad f'(x) = e^x + 3xe^x \\ f''(x) = e^x + 3e^x + 3xe^x \quad &\Longrightarrow \quad f''(x) = 4e^x + 3xe^x \end{aligned}$$

On vérifie

$$\begin{aligned} f''(x) + 4f'(x) + 4f(x) = & \quad (4e^x + 3xe^x) + 4(e^x + 3xe^x) + 4(3xe^x - 2e^x) \\ = & \quad (4 + 4 - 2 \times 4)e^x + (3 + 4 \times 3 + 4 \times 3)xe^x \\ = & \quad 27xe^x \end{aligned}$$

b. Utilisant le principe de superposition déterminer une solution de l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y'' + 4y' + 4y = xe^x$$

D'après le prinicpe de superposition une solution particulière de (E) est $\boxed{y_p(x) = \frac{3x-2}{27}e^x}$.

c. Déterminer l'unique solution de (E) vérifiant les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.
L'équation caractéristique associée à (E) est $r^2 + 4r + 4 = 0$. Son discriminant est $\Delta = 4^2 - 4 \times 4 \times 1 = 0$. Donc l'équation caractéristique n'admet qu'une solution racine réelle qui est $r = -2$. Alors la solution de l'équation homogène associée à (E) est $\boxed{y_H = Ae^{-2x} + Bxe^{-2x}}$.
Finalement la solution générale de (E) est

$$\boxed{y(x) = \underbrace{Ae^{-2x} + Bxe^{-2x}}_{y_H} + \underbrace{\frac{3x - 2}{27}e^x}_{y_P}.}$$

Il nous faut maintenant déterminer A et B en utilisant les hypothèses $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.
$y(0) = 0$ donne $\boxed{A = \frac{2}{27}}$.
Puisque $y'(x) = -2Ae^{-2x} + Be^{-2x} - 2Bxe^{-2x} + \frac{3}{27}e^x + \frac{3x-2}{27}e^x$, la condition $y'(0) = 0$ nous donne $-2A + B + 3 - \frac{2}{27} = 0$. Donc $\boxed{B = \frac{3}{27}}$.

d. $(*)$ Soit $f :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur $]0, \infty[$ et qui vérifie :

$$(*) \qquad t^2 f''(t) + 5tf'(t) + 4f(t) = t \ln t.$$

(1) On pose $g(x) = f(e^x)$, vérifier que g est solution de (E).

$$g(x) = f(e^x) \implies g'(x) = f'(e^x)e^x \implies g''(x) = f''(e^x)e^x e^x + f'(e^x)e^x = f''(e^x)e^{2x} + f'(x)e^x$$

On vérifie que g est une solution de (E) :

$$\begin{aligned} g''(x) + 4g'(x) + 4g(x) = \ & e^{2x} f''(e^x) + e^x f'(e^x) + 4e^x f'(e^x) + 4f(e^x) \\ = \ & e^{2x} f''(e^x) + 5e^x f'(e^x) + 4f(e^x) \end{aligned}$$

Or f satisfait l'équation différentielle $(*)$. Donc (en posant $t = e^x$)

$$e^{2x} f''(e^x) + 5e^x f'(e^x) + 4f(e^x) = e^x \ln(e^x) = xe^x$$

Alors g vérifie l'équation (E).

(2) En déduire une expression de f.
Puisque g vérifie l'équation (E), on a que g est de forme $g(x) = Ae^{-2x} + Bxe^{-2x} + \frac{3x-2}{27} e^x$. Donc

$$f(t) = g(\ln(t)) = At^{-2} + B\ln(t)t^{-2} + \frac{3\ln(t) - 2}{27} t$$

Exercice 4 : On note $j = e^{\frac{2\pi}{3} i}$ et $u = -1 - 2i$.

a. Mettre j, j^2 et j^3 sous forme algébrique.
En déduire les trois solutions complexes de l'équation $z^3 = 1$.
$j = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3})$. Donc $\boxed{j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$. Utilisant une des identités remarquables on calcule

$$\begin{aligned} j^2 = \ & \left(-\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\ = \ & \tfrac{1}{4} + \left(i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2 \times \tfrac{1}{2} \times \tfrac{\sqrt{3}}{2} \\ = \ & \tfrac{1}{4} - \tfrac{3}{4} - i\tfrac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}$. Finalement

$$\begin{aligned} j^3 = j \times j^2 = \ & \left(-\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \left(-\tfrac{1}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ = \ & (-\tfrac{1}{2})^2 - \left(i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{4} - (-\tfrac{3}{4}) \end{aligned}$$

Donc $\boxed{j^3 = 1}$. Les trois solutions de $z^3 = 1$ sont $1, j, j^2$.

b. Calculer $(-1 - 2i)^3$ puis trouver toutes les racines cubiques de $11 + 2i$.

$$\begin{aligned} (-1-2i)^3 = \ & (-1-2i)^2 \times (-1-2i) = (1 - 4 + 4i) \times (-1-2i) \\ = \ & (-3 + 4i) \times (-1 - 2i) = 3 + 8 + i(6 - 4) = 11 + 2i \end{aligned}$$

Puisque $(-1 - 2i)^3 = 11 + 2i$, alors les racines cubiques de $11 + 2i$ sont

$$-1 - 2i \quad , \quad (-1-2i)j \quad , \quad (-1-2i)j^2$$

Exercice 5 : Le tableau suivant donne les résultats obtenus à partir de 10 essais de laboratoire concernant la charge de rupture d'un acier en fonction de sa teneur en carbone. Soit x la teneur en carbone de l'acier et y la charge de rupture en kilogramme.

Teneur en carbone : x_i	70	60	68	64	66	64	62	70	74	62
Charge de rupture (en kg) : y_i	87	71	79	74	79	80	75	86	95	70

a. Représenter graphiquement le nuage de points de coordonnées (x_i, y_i). On prendra en abscisse 1cm pour une unité en représentant les abscisses à partir de la valeur 60. On prendra en ordonnée à partir de 70.

b. Calculer la moyenne de x, puis de y.

$$\overline{x} = \frac{70+60+68+64+66+64+62+70+74+62}{10} = 66$$
$$\overline{y} = \frac{87+71+79+74+79+80+75+86+95+70}{10} = 79,6$$

c. Calculer les variances et les écart-types de x et y, ainsi que la covariance de x et y.
On rappelle que la formule de variance de x est $\overline{x^2} + \overline{x}^2$. On calcule

$$\overline{x^2} = \frac{70^2+60^2+68^2+64^2+66^2+64^2+62^2+70^2+74^2+62^2}{10} = 4373,6$$

$$\text{Donc} \quad \boxed{\text{Var }(x) = \overline{x^2} - \overline{x}^2 = 4373,6 - 66^2 = 17,6} \quad \text{et} \quad \boxed{\sigma(x) = \sqrt{\text{Var}(x)} = 4,2}$$

De même

$$\overline{y^2} = \frac{87^2+71^2+79^2+74^2+79^2+80^2+75^2+86^2+95^2+70^2}{10} = 6391,4$$

$$\text{Donc} \quad \boxed{\text{Var }(y) = \overline{y^2} - \overline{y}^2 = 6391,4 - 79,6^2 = 55,24} \quad \text{et} \quad \boxed{\sigma(y) = \sqrt{\text{Var}(y)} = 7,43}$$

$$\overline{xy} = \frac{70\times87+60\times71+68\times79+64\times74+66\times79+64\times80+62\times75+70\times86+74\times95+62\times70}{10} = 5283,2$$

$$\text{Donc} \quad \boxed{\text{Cov }(x,y) = \overline{xy} - \overline{x}\overline{y} = 5283,2 - 66\times79,6 = 29,6}$$

d. Déterminer l'équation de la forme $y = ax + b$ de la droite de l'ajustement linéaire.

$$a = \frac{\text{Cov}(x,y)}{\text{Var}(x)} = \frac{29,6}{17,6} = 1,7 \quad \text{et} \quad b = \overline{y} - a\overline{x} = 79,6 - 1,7\times66 = -31,4$$

e. Un acier a une teneur en carbone de 77. Donner une estimation de sa charge de rupture.
On utilise l'estimation donnée par la droite de régression. On estime que la charge de rupture est $a \times 77 + b$; c'est-à-dire $\boxed{1,7\times77 - 31,4 = 98,1}$.