Contrôle du 3 mai 2021

Durée 1h. Aucun document ni calculatrice autorisé

Exercice 1: **[0,75+0,75pts]** Soient $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Quel produit est défini : $M \times N$ ou $N \times M$?
2. Quel est le format de la matrix X telle que $N \times X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2: Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 13 & 10 & 8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -4 & 5 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -7 & -2 \\ -4 & 5 & 0 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 13 & 9 & 6 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

1. **[1,5pts]** Montrer que l'inverse de la matrice A est la matrice B.
2. **[0,5+2pts]** Ecrire le système d'équation linéaire (S) : $\begin{cases} x + \ \ y + \ z &= 0 \\ 6x + \ 5y + 4z &= 1 \\ 13x + 10y + 8z &= 2 \end{cases}$ sous forme matricielle et le résoudre.
3. **[1,5+1,5+0,5pts]** Déterminer le déterminant de la matrice C et de la matrice D. Laquelle est inversible?

Exercice 3: Soient $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

1. **[2pts]** Déterminer les réels a et b pourque $a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0}$.
2. **[0,5+0,5pts]** Est-ce que la famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est libre ?
3. **[2pts]** Montrer que la famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ est une base du plan d'équation $3x - 2y - z = 0$.

Exercice 4: Soient $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

1. **[2pts]** Montrer que la famille $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. **[2pts]** Déterminer les réels a, b et c pourque $a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2 + c\vec{u}_3 = \vec{v}$.
3. **[2pts]** Quelle est la matrice colonne des coordonnées du vecteur $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{B}$.