L1 PCST
Mars 2021
S2 Mathématiques

Contrôle du 8 mars 2021

Durée 1h30. Aucun document ni calculatrice autorisé

Exercice 1: Soient

$$f(x;y) = x^2 - y^2 \quad , \quad g(x;y) = \frac{1}{\ln(1 - x^2 - y^2)} \quad , \quad h(x;y) = \frac{\sqrt{x}}{\ln(1 - x^2 - y^2)}$$

1. Déterminer et puis dessiner les courbes de niveau $f(x;y) = 0$.
2. Déterminer et puis dessiner le domaine de définition de g et celui de h.
3. Déterminer les deux dérivées partielles de g.

Exercice 2: Soit $f(x,y) = \dfrac{x + 2y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 6$.

1. Déterminer la limite $\lim\limits_{(x;y)\to(1;2)} f(x;y)$.
2. Notons $g(x) = f(x;0)$ et $h(y) = f(0;y)$.
   (a) Expliciter les fonctions g et h et déterminer les limites suivantes : $\lim_{x\to 0} g(x)$ et $\lim_{y\to 0} h(y)$.
   (b) Est-ce que f admet une limite en $(0;0)$.

Exercice 3: Déterminer les réels a pour lesquels la fonction $g(x;t) = \cos(x - at)$ est une solution de l'équation d'onde $\dfrac{\partial^2 g}{\partial^2 t} = 4\dfrac{\partial^2 g}{\partial^2 x}$.

Exercice 4: Calculer $\iint_D f(x;y)\,dxdy$ où $f(x;y) = \dfrac{x^2}{y}$ et D est le rectangle de sommets $A(-1;1)$, $B(1;1)$, $C(1;2)$ et $D(-1;2)$.

Exercice 5:

$$(S_1) : \begin{cases} x \quad + 3z = 7 \\ 2x - y + z = 0 \\ -2x + 2y + z = 5 \end{cases} \qquad (S_2) : \begin{cases} x \quad + 3z = 7 \\ 2x - y + z = 0 \\ -5x + 3y \quad = 7 \end{cases}$$

Exercice 6: Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$. Soient λ et μ deux scalaires.

1. Donner la taille des matrices A et B. Quel est le coefficient c_{23} de la matrice C ?
2. Est-ce que la somme $\lambda A + \mu B$ est définie ? Pourquoi ? Si oui la déterminer.
3. Est-ce que la somme $\lambda A + \mu C$ est définie ? Pourquoi ? Si oui la déterminer.