Examen du 17 mai 2021

Durée 3h. Aucun document ni calculatrice autorisé

Exercice 1: Soient

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Effectuer les produits matriciels AB et BA. Laquelle de ces deux matrices est inversible ? Trouver son inverse.

Exercice 2: Soient

$$u = 1 + i \quad \text{et} \quad v = \sqrt{3} + i \quad \text{et} \quad j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

1. (a) Déterminer les modules de u, v et $\dfrac{u}{v}$.
   (b) Déterminer un argument de u, un argument de v et un argument de $\dfrac{u}{v}$.
   (c) Ecrire $\dfrac{u}{v}$ sous forme algébrique et trigonométrique.
   (d) En déduire que

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \qquad \text{et} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

   (e) On pose $w = \left(\dfrac{u}{v}\right)^{2022}$. Déterminer l'argument de w compris entre 0 et 2π.
   En déduire que w est purement imaginaire. *indication :* $2022 = 168 \times 12 + 6$
2. (a) Montrer que $1, j, j^2$ sont les racines cubiques d'unité.
   (b) En déduire le module et un argument pour chacune des racines cubiques de u.

Exercice 3: Dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan, on considère les quatre points dont les coordonnées sont les suivates :

$$P(0;0) \quad , \quad Q(1;-2) \quad , \quad R(1;2) \quad , \quad S(0;1)$$

On note D l'intérieur du quadrilatère $PQRS$.

1. Représenter le domaine D dans le repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
2. Calculer

$$I = \iint_D \frac{1}{(1+3x)^2}\, dydx.$$

Exercice 4: On considère la fonction f de deux variables définie par :

$$f(x,y) = \frac{y^2 - 4x^2 + 3}{x^2 - y}$$

1. Déterminer puis représenter dans un repère orthonormé le domaine de définition de la fonction f.

2. (a) Montrer que la courbe de niveau -4 de la fonction f est la réunion de deux droites. Vous pouvez utiliser l'identité $y^2 - 4y + 3 = (y-2)^2 - 1$.

   (b) Représenter dans un repère orthonormé ces deux droites.

3. Soit S_f la surface associée à la fonction f et $A = (1; 2; f(1;2))$ un point de cette surface

   (a) Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à la surface S_f en A.

   (b) En déduire une valeur approchée de $f(1,1; 2,15)$.

Exercice 5: Soit p un paramètre réel et soit (S_p) la famille de sytème linéaire indexés par p

$$(S_p) : \begin{cases} x - 2y + 3z &= 1 \\ 2x + py + 6z &= 6 \\ -x + 3y + (p-3)z &= 0 \end{cases}$$

1. Déterminer la matrice A_p telle que $A_p \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Calculer le déterminant de A_p et montrer qu'il s'écrit sous la forme $p(p+4)$.

3. Expliquer pourquoi si $p \neq 0$ et $p \neq -4$, alors (S_p) admet une unique solution. Calculer cette solution pour $p = 2$.

4. Soit $p = -4$. Montrer que (S_{-4}) est incompatible.

5. Soit $p = 0$. Déterminer l'ensemble des solutions de (S_0).

Exercice 6: Soient $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, et $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$ des vecteurs de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer les réels a, b pour que $a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2 = u_3$.

   Est-ce que la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$? Pourquoi ?

2. Déterminer un vecteur $\vec{v}$ pour que la famille $(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{v})$ soit une base de $\mathbb{R}^3$.

   Quelle est la matrice colonne des coordonnées du vecteur $\vec{v}$ dans cette base.

3. Donner une base du plan vectoriel d'équation $x - 2y + 3z = 0$.