L1 PCST
S2, Mathématiques

Examen - Session 2 - 22 juin 2018

Durée : 1h30. Aucun document ni calculatrice autorisé
Toute réponse non justifiée est considérée comme zéro

Questions :

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle : $y'' + 4y' + 4y = 0$.
2. Est-ce que le point $D(1,1,1)$ appartient au plan (ABC) où $A(1,0,0)$, $B(0,0,1)$ et $C(3,1,0)$?

Exercice 1: On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-x}$

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f. En déduire les points critiques de f.
2. Déterminer la nature des points critiques de f.

Exercice 2: On considère les matrices suivantes : $P = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 5 & 6 & -31 \\ 1 & 1 & -6 \end{pmatrix}$.

1. (a) Montrer que l'inverse de la matrice P est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ -2 & -3 & 13 \\ -1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$.

   (b) En utilisant un équivalent matriciel résoudre: $\begin{cases} 5x+y+2z = -5 \\ x-y+3z = 2 \\ x + z = 1 \end{cases}$.
2. Montrer que les colonnes de la matrice P sont les vecteurs propres de M. En déduire l'expression de M^{42}.

Exercice 3: On se propose de résoudre sur $I =]0,\pi[$ l'équation différentielle

$$y'\sin(x) - y\cos(x) = (2x+1)\sin^2(x)$$

1. Justifier pourquoi cette équation équivaut sur I à

$$y' - y\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = (2x+1)\sin(x) \qquad (E)$$

2. Présenter l'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' - y\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = 0$.
3. Montrer que $(x^2+x)\sin(x)$ est une solution particulère de (E) et puis donner l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 4: Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction de deux variables définie comme suit :

$$f(x,y) = \frac{x^2y + 3y^3}{x^2 + y^2} \quad \text{pour} \quad (x,y) \neq (0,0) \qquad \text{et} \quad f(0,0) = 0$$

1. La fonction f est-elle continue en $(0,0)$? Justifer.
2. Déterminer les dérivées partielles de f en un point $(x_0, y_0) \neq (0,0)$.
3. Déterminer les dérivées partielles de f par rapport à x, à y en $(0,0)$.
   indication : Il faut utiliser la définition de la dérivée partielle
4. Est-ce que f est de classe C^1 ?