

Examen 2ème session
Toute réponse non justifiée est notée zéro

Question : Quelles sont les racines quatrième d'unité ?

Exercice 1. On considère la fonction suivante de deux variables.

$$f(x, y) = \ln \left(1 - \frac{2x}{y} \right)$$

1. Déterminer et dessiner le domaine de définition, \mathcal{D}_f de f .
2. Soit \mathcal{S}_f la surface définie par $\mathcal{S}_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathcal{D}_f, z = f(x, y)\}$. Déterminer l'équation du plan tangent en point $(0; 2; f(0; 2))$ à cette surface.

Exercice 2. Soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$g(x, y) = xy - x^2 - y^2$$

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2 de g .
2. Déterminer les points critiques de g et leurs natures.

Exercice 3. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer P^{-1} et $P^{-1}AP$. En déduire A^n .
2. Calculer $\det(A)$ et $\det(P^{-1}AP)$. Que remarquez-vous ? Pouvez-vous justifier ?

Exercice 4. Soit $z = \sqrt{3} + i$ et $w = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

1. Donner l'argument de z appartenant à l'intervalle $[0, 2\pi[$. En déduire un argument du nombre complexe $i \times z \times w$.
2. Déterminer z^{2020} .