L1 PCST
S2, Mathématiques

Examen - Session 1 - 15 mai 2019

Durée : 3h00. Aucun document ni calculatrice autorisé
Toute réponse non justifiée est considérée comme zéro

Questions :

1. Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants : $(3+2i)(1-3i)$, $\dfrac{3+2i}{1-3i}$ et le nombre complexe dont le module est 2 et l'argument est $\pi/3$.

2. Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants : $1+i$, $\sqrt{3}+i$, $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}$.

3. Montrer que l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice $\begin{pmatrix} -24 & 20 & -5 \\ 18 & -15 & 4 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ et en déduire la solution du système suivant : $\left\{\begin{array}{rl} -24x+20y-5z & =1 \\ 18x-15y+4z & =2 \\ 5x-\ \ 4y+\ \ z & =-1 \end{array}\right.$

4. Soit P le plan passant par les trois points $A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Déterminer une équation cartésienne du plan parallèle au plan P passant par le point $D\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 1: Rappelons la formule de Moivre : $\forall \theta \in \mathbb{R}$ on a $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.

1. En utilisant la formule de Moivre, calculer $\cos(3x)$ et $\sin(3x)$ en fonction de $\sin x$ et $\cos x$.
2. En utilisant la formule de Moivre, écrire sous forme algébrique le nombre $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2019}$.
   Indication : on pourra utiliser que $2019 = 6 \times 336 + 3$.

Exercice 2: Soit $f(x,y) = -4x^2 + x^2y^2 + \dfrac{y^4}{4} - y^3 - 2y^2$, où $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Déterminer les points critiques de $f(x,y)$.

2. Les points $(0,4)$ et $(\sqrt{3},2)$ sont des points critiques de $f(x,y)$. Déterminer la nature (maximum local, minimum local, ou point-selle) de ces points critiques.

Exercice 3: Soit la fonction

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{3y^4 - x^2(y-x^2) - 2x^3}{x^2-y^2} & \text{si } x^2 - y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{si } x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$$

Calculer, si elles existent, les deux dérivées partielles d'ordre 1 de g au point $(0,0)$.

Exercice 4: Soit I l'intervalle $]-1,1[$. On considère l'équation différentielle :

$$(E) \qquad\qquad (1-x^2)y' - xy = x\sqrt{1-x^2}$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée.
2. Déterminer les solutions de (E) sur I.
3. Déterminer la solution de (E) sur I lorsque $y(0) = -3$.

Exercice 5:

1. Résoudre l'équation différentielle suivante : $y'' - 4y' + 3y = (2x+1)e^{-x}$.

2. Montrer que $f(x) = (-\frac{1}{2}x^2 - x)e^x$ est une solution particulière de $y'' - 4y' + 3y = (2x+1)e^x$.

3. En déduire l'unique solution de

$$y'' - 4y' + 3y = (2x+1)(e^{-x} + e^x) \qquad \text{avec } \; y(0) = \frac{5}{16} \text{ et } y'(0) = -\frac{9}{16}$$

Exercice 6: Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de A.

2. En déduire une matrice P telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale. Calculer A^{50}.

3. Soit y une fonction de la variable x, (infiniment dérivable) vérifiant : (E_0) $y'' - 4y' + 3y = 0$. On pose

$$Y = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} \quad , \quad \frac{dY}{dx} = \begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \end{pmatrix} \quad , \quad Z = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix} \quad \text{avec } \; Z = P^{-1}Y$$

a. Montrer que $\dfrac{dY}{dx} = AY$ et que $\dfrac{dZ}{dx} = DZ$.

b. Déterminer la matrice colonne Z en fonction de x. En déduire Y et puis la solution générale de (E_0).