L1 PCST
S2, Mathématiques

Examen - Session 1 - 23 mai 2018

Durée : 3h00. Aucun document ni calculatrice autorisé
Toute réponse non justifiée est considérée comme zéro

Exercice 1: On fixe un repère othonormé de l'espace $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les trois points $A(0,0,0)$; $B(2,1,-1)$; $C(1,1,1)$.

1. Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
2. L'ensemble des points $D(x,y,z)$ vérifiant : $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ et $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.
   est une droite. Déterminer l'équation paramétrique de cette droite.
3. Parmi tous les points obtenus à la question précédente, combien appartiennent au plan (ABC). Justifier.

Exercice 2: On considère la fonction réelle de deux variables f définie par $f(x,y) = \frac{y^2}{2y-x^2}$.

1. Déterminer et représenter son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$.
2. Ecrire l'équation au plan tangent à la surface $\mathcal{S}_f$ au point $(2;3;f(2,3))$. En déduire une valeur approchée de f au point $(2,2\ ;2,9)$.
3. Déterminer et représenter la courbe de niveau C_k pour $k=1$.

Exercice 3: On définit la matrice M et les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ comme suit :

$$M = \begin{pmatrix} 7 & -6 & -2 \\ 9 & -8 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $\vec{u}$ $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs propres de M de valeurs propres -1, 0, et 1 respectivement. En déduire une matrice P telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale.
2. Soit $k \in \mathbb{N}_{>0}$. Déterminer $\left(P^{-1}MP\right)^k$ et puis M^k. Vous pouvez séparer k pair et impair.
3. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles satisfaisant les relations suivantes :

$$\begin{aligned} 7a_n - 6b_n - 2c_n &= a_{n+1} \\ 9a_n - 8b_n - 3c_n &= b_{n+1} \\ -2a_n + 2b_n + \ \ c_n &= c_{n+1} \end{aligned}$$

   Notons $M^0 = I_3$ et pour tout entier $n \geq 0$, posons $X_n = \left(\begin{smallmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{smallmatrix}\right)$.

   (a) Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, on a $X_n = M^n X_0$.

   (b) En déduire une expression de a_n, b_n et c_n en fonction de a_0, b_0 et c_0.

Exercice 4: On considère la fonction suivante : $f : \mathbb{R}\times]0,+\infty] \to \mathbb{R}$ définie comme

$$f(x,y) = y\left(x^2 + (\ln y)^2\right)$$

1. Déterminer les points critiques de f.
2. Etudier la nature de ces points critiques.
3. Montrer que $(0,1)$ est un extremum global de f.

Exercice 5: On veut trouver de deux manières différentes l'ensemble des fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifiant l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) \qquad y'' + 2y' = \sin x$$

1. (a) Si (E_0) est l'équation sans second membre attachée à (E), écrire son équation caractéristique et en déduire l'ensemble des solutions de (E_0).

   (b) Montrer que
   $$-\frac{2}{5}\cos x - \frac{1}{5}\sin x$$
   est une solution particulière de (E) et en déduire la solution générale de (E).

2. (a) En posant $z = y'$ dans (E) se ramener à une équation différentielle d'ordre 1 en z, que l'on écrira et notera (**e**).

   (b) Trouver la solution générale z de (**e**).
   Indication : une primitive de $e^{2x}\sin x$ *est* $e^{2x}\left(\frac{2}{5}\sin x - \frac{1}{5}\cos x\right)$.

   (c) En déduire la solution générale y de (E).