L1 PCST
S2, Mathématiques

Examen - Session 2 - 13 juin 2017

Durée : 1h30. Aucun document ni calculatrice autorisé
Toute réponse non justifiée est considérée comme zéro

Questions :

1. Déterminer et dessiner le domaine de la fonction $f(x,y) = \sqrt{xy}$.
2. Trouver les solutions réelles d'équation différentielle $y' + y\sin x = 0$.
3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $f(100;2) = 5$, $f'_x(100;2) = 3$ et $f'_y(100;2) = -1$. Donner une valeur approchée de $f(101\,;1,8)$.
4. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ est l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et l'utilser pour rÈsoudre le système d'équations linéares $\begin{cases} x + y + 2z &= 5 \\ x - y - \ z &= 1 \\ x \qquad + \ z &= 3 \end{cases}$

Exercice 1: On considère la fonction à deux variables $f(x,y) = x(x+1)^2 - y^2$.

1. Déterminer les deux points critiques de f.
2. Préciser la nature de chacun d'eux.

Exercice 2: Soit A la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.

1. Déterminer les valeurs propres de A, et pour chaque valeur propre donner un vecteur propre associé.
2. Donner une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Exercice 3: On considère l'équation différentielle

$$y'' + y = x^3 + x^2 \qquad\qquad (E)$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E). C'est à dire : $y'' + y = 0$.
2. Montrer que $x^3 + x^2 - 6x - 2$ est une solution particulière de (E) et en déduire la forme générale de (E).
3. Trouver la solution exacte si $y(0) = y'(0) = 0$.

Exercice 4: On veut étudier la continuité de la fonction

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0) \quad \text{et} \quad f(0,0) = 0.$$

1. Déterminer $f(0,x)$ et calculer $\lim_{x\to 0} f(x,0)$.
2. Déterminer $f(x,-x)$ et calculer $\lim_{x\to 0} f(x,x)$.
3. En déduire que f n'est pas continue en $(0,0)$.