L1 PCST
S2, Mathématiques

Examen - Session 1 - 18 mai 2017

Durée : 3h00. Aucun document ni calculatrice autorisé
Toute réponse non justifiée est considérée comme zéro

Questions :

1. Donner les dérivées partielles d'ordre 1 de $e^{\sin x \cos y}$ et les évaluer en $(\pi, 0)$.
2. Montrer que les droites dont les représentations paramétriques sont données ci-dessous sont perpendiculaires.

$$\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x = t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases} \qquad \mathcal{D}_2 : \begin{cases} x = s \\ y = s \\ z = s \end{cases}$$

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer A^{-1}. Calculer $A^2 - I_3$. Que remarquez-vous ?
4. Dessiner la ligne de niveau $k = 1$ pour la fonction $f(x, y) = \cos(\pi(x + y))$.
5. On suppose $x > -1$. Résoudre l'équation différentielle $(1 + x)^2 y' + (1 + x)y - 2 = 0$ avec la condition initiale $y(0) = -1$.

Exercice 1: Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0) \quad \text{et} \quad f(0, 0) = 0.$$

1. Montrer que f est continue en tout point de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer $f'_x(x, y)$ et $f'_y(x, y)$ pour les points $(x, y) \neq (0, 0)$.
3. Déterminer les dérivées partielles $f'_x(0, 0)$ et $f'_y(0, 0)$ et montrer que f'_x n'est pas continue en $(0, 0)$.

Exercice 2: Soient a et b des nombres réels et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= a \\ u_1 &= b \\ u_{n+2} &= u_{n+1} + 2u_n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On considère, pour tout entier n positif ou nul, le vecteur colonne $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'on a l'égalité $X_{n+1} = AX_n$, où A est une matrice carrée d'ordre 2, à déterminer.
2. Par récurrence, en déduire l'égalité $X_n = A^n X_0$, pour tout entier n positif ou nul. Ici, on a posé $A^0 = I_2$ et $A^{k+1} = A^k \times A$.
3. Montrer que A est diagonalisable. Calculer A^n.
4. En déduire une formule donnant la valeur de u_n en fonction de a, b et n.

Exercice 3: Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + x^2y^2 - x^4 - y^4$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Déterminer les neuf points critiques de f.
2. Déterminer la nature des points critiques suivants :

$$(0,0) \quad , \quad (0,1) \quad , \quad (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

3. Est-ce qu'un minimum global existe ?

Exercice 4: On considère l'équation différentielle :

$$y'' + 6y' + 9y = d(x) \qquad\qquad (E)$$

1. Soit λ et μ des nombres réels. Montrer que si $y_1(x)$ est une solution de $y'' + 6y' + 9y = d_1(x)$ et $y_2(x)$ une solution de $y'' + 6y' + 9y = d_2(x)$, alors $\lambda y_1(x) + \mu y_2(x)$ est une solution de $y'' + 6y' + 9y = \lambda d_1(x) + \mu d_2(x)$.
2. Résoudre l'équation différentielle homogène $y'' + 6y' + 9y = 0$, associée à (E).
3. Montrer que $\frac{1}{2}x^2e^{-3x}$ est une solution particulière de (E) lorsqu'on pose $d(x) = e^{-3x}$.
4. Montrer que $\frac{4}{50}\cos x + \frac{3}{50}\sin x$ est une solution particulière de (E) lorsqu'on pose $d(x) = \cos x$.
5. Donner la forme générale des solutions de (E) lorsque :

$$d(x) = 2e^{-3x} + 50\cos x.$$

Exercice 5: Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 - 2y^3$.

1. Montrer que l'équation du plan tangent $\mathcal{P}_{M_0}$ à la surface S_f de f en un point quelconque $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de S_f est

$$2x_0x - 6y_0^2y - z = 2x_0^2 - 6y_0^3 - z_0.$$

2. Pour le point $M_0 = (2,1,2)$, déterminer tous les points M tels que le plan tangent en $M \in S_f$ soit parallèle à $\mathcal{P}_{M_0}$.
3. Déterminer la représentation paramétrique de la droite passant par $M_0 = (2,1,2)$ et perpendiculaire à $\mathcal{P}_{M_0}$.