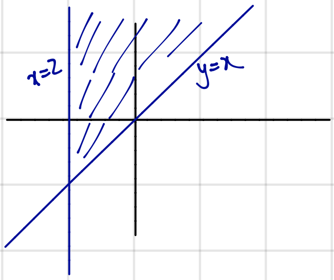
Ex1 a) $D_f \subset \mathbb{R}^2$

b) la ligne de niveau k de f est un ss-ensemble de $\mathbb{R}^2$

c) Graphe de f est un ss-ensemble de $\mathbb{R}^3$

d) f est continue en pt (a,b). Donc $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ existe et est $f(a,b)$.

Ex2 $f(x,y)=\sqrt{x+2}+\ln(y-x)$. $(x,y)\in D_f$ ssi $x+2\geqslant 0$ et $y-x>0$



Ex3 $f(x,y)=\ln(x^{1/4}+y^{1/6}-1)$

1) $f'_x(x,y)=\dfrac{1}{x^{1/4}+y^{1/6}-1}\times \frac{1}{4}x^{-3/4}$ donc $f'_x(a,b)=\dfrac{a^{-3/4}}{4\times(a^{1/4}+b^{1/6}-1)}$

$f'_y(x,y)=\dfrac{1}{x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{6}}-1}\times\frac{1}{6}y^{-5/6}$ donc $f'_y(a,b)=\dfrac{b^{-5/6}}{6(a^{1/4}+b^{1/6}-1)}$

2) $f'_x(1,1)=\frac{1}{4}$; $f'_y(1,1)=\frac{1}{6}$ Donc l'équation du plan tangent au pt $(1,1,0)$ est

$$z=f(1,1)+(x-1)f'_x(1,1)+(y-1)f'_y(1,1)$$
$$z=0+\frac{1}{4}(x-1)+\frac{1}{6}(y-1) \Rightarrow \boxed{3x+2y-12z=5}$$

3) $\ln((1,02)^{1/4}+(0,96)^{1/6}-1)=f((1,02;0,96))\simeq 0+\frac{1}{4}(1,02-1)+\frac{1}{6}(0,96-1)=-0,001\overline{6}$

Ex4 $f(x,y)=x^3-3x+y^2x$

(a,b) est un pt critique de f si $f'_x(a,b)=f'_y(a,b)=0$

$f'_x(x,y)=3x^2-3+y^2$; $f'_y(x,y)=2xy$

$f'_y(a,b)=0 \Rightarrow 2ab=0$ Donc soit $a=0$, soit $b=0$

Cas $a=0$ Utilisant $f'_x(a,b)=0$ on a $3\times 0^2-3+b^2=0 \Rightarrow b=\pm\sqrt{3}$

Cas $b=0$ Utililisant $f'_x(a,b)=0$ on a $3\times a^2-3+0^2=0 \Rightarrow a=\pm 1$

Donc les 4 pts critiques sont $(0,\sqrt{3}), (0,-\sqrt{3}), (1,0), (-1,0)$

$f''_{xx}(x,y)=6x$, $f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)=2y$, $f''_{yy}(x,y)=2x$

* pt $(0,\sqrt{3})$: $r=0$, $s=2\sqrt{3}$, $t=0$. Donc $s^2-rt>0$ pt de col

* pt $(0;-\sqrt{3})$: $r=0$, $s=-2\sqrt{3}$, $t=0$ $\Rightarrow$ $s^2-rt>0$ pt de col
* pt $(1,0)$: $r=6$, $s=0$, $t=2$ $\Rightarrow$ $s^2-rt<0$ et $r>0$ minimum local
* pt $(-1,0)$ $r=-6$, $s=0$, $t=-2$ $\Rightarrow$ $s^2-rt<0$ et $r<0$ max local

Ex5 1) f est une fonction rationnelle bien définie sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Donc il est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ $f'_x(x,y)=\dfrac{y(x^2+y^2)-2x\,xy}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{-x^2y+y^3}{(x^2+y^2)^2}$

$$f'_y(x,y)=\frac{x(x^2+y^2)-2y\,xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

2) $f'_x(0,0)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{0-0}{h}=0$

De m̂ manière on trouve $f'_y(0,0)=0$.

$\lim\limits_{(x,2x)\to(0,0)} f'_x(x,2x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-x^2\times2x+8x^3}{(25x^2)^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6}{25x}$ n'a pas de limite, Donc f'_x n'est pas continue.