
Contrôle du 25 mars 2016

Durée 1h30. Aucun document ni calculatrice autorisé

Exercice 1: Dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère les trois vecteurs $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = -\vec{j} + 2\vec{k}$, et $\vec{w} = -2\vec{k}$.

1. Calculer $\vec{u} \wedge \vec{v}$, $\vec{v} \wedge \vec{u}$. Qu'observe-t-on? Quelle propriété est vérifiée par cette observation?
2. Calculer $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{u}$. Qu'observe-t-on? Quelle propriété est vérifiée par cette observation?
3. Déterminer le produit mixte $\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$ puis comparer avec le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Exercice 2: Soient $A = (1, 0, 2)$, $B = (0, 1, 1)$ et $C = (1, -1, 0)$ trois points de l'espace. Déterminer :

1. l'écriture paramétrique de la droite Δ passant par A et de vecteur directeur \overrightarrow{BC} ;
2. un point D de Δ distinct de A ;
3. l'équation du plan \mathcal{P} , contenant la droite Δ et passant par l'origine O ;
4. l'équation du plan \mathcal{P}' , passant par $E = (1, 2, 3)$ et orthogonal à Δ ;
5. le point d'intersection F , de \mathcal{P}' et Δ .
6. Vérifier que les droite (EF) et Δ sont perpendiculaires.

Exercice 3: Soient $A = (2, 5, 0)$, $B = (8, -1, 1)$ et $C = (10, 5, -2)$.

1. Déterminer les coordonnées du point D tel que $\overrightarrow{AD} = \vec{j} - 3\vec{k}$ et montrer que les points B , C et D sont alignés.
2. Déterminer le point E tel que $ABEC$ soit un parallélogramme et en calculer l'aire.

Exercice 4: Soit $A_m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & m \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et \mathcal{S} le système d'équations linéaires $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y + z = 2 \\ x + 2y - z = 3 \end{cases}$.

1. Ecrire la condition sur m pour que la matrice A_m soit inversible.
2. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est l'inverse de A_1 .
3. Ecrire \mathcal{S} sous forme matricielle et résoudre.