L1 PCST
Printemps 2016
S2 Mathématiques

Contrôle du 26 février 2016

Durée 1h30. Aucun document ni calculatrice autorisé

Exercice 1: Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables réelles continue en point $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

(a) D_f, le domaine de définition de f, est un sous-ensemble de : i) $\mathbb{R}$ ii) $\mathbb{R}^2$ iii) $\mathbb{R}^3$.

(b) La ligne de niveau k, de f, est un sous-ensemble de : i) $\mathbb{R}$ ii) $\mathbb{R}^2$ iii) $\mathbb{R}^3$.

(c) Le graph de f est un sous-ensemble de : i) $\mathbb{R}$ ii) $\mathbb{R}^2$ iii) $\mathbb{R}^3$.

(d) Laquelle de ces proposition est vraie (justifier)

i) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ existe mais on ne connait pas sa valeur
ii) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ existe et on connait sa valeur
iii) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ n'existe pas
iv) on ne peut rien conclure sur l'existence de $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$

Exercice 2: Déterminer et représenter la domaine de définiton de la fonction

$$f(x, y) = \sqrt{x + y} + \ln(y - x).$$

Exercice 3: On considère la fonction $f(x, y) = \ln(x^{1/4} + y^{1/6} - 1)$ et sa surface S d'équation $z = f(x, y)$.

1. Déterminer les dérivées partielles de f pour le point $(a, b) \in D_f$.
2. Déterminer l'équation du plan tangent au point $(1, 1, 0)$.
3. Donner une valeur approchée de $\ln((1, 02)^{1/4} + (0, 96)^{1/6} - 1)$.

Exercice 4: On considère la fonction $f(x, y) = x^3 - 3x + y^2 x$. Trouver les 4 points critiques de f et leurs natures.

Exercice 5: On d́finit la fonction

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Pourquoi f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Trouver les expressions de f'_x et f'_y sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
2. Montrer que $f'_x(0, 0)$ et $f'_y(0, 0)$ existent, mais que f n'est pas de classe C^1 au voisinage de $(0, 0)$.