L1 PCST
S2, Mathématiques

Examen - Session 1 - 20 mai 2016

Durée : 3h00. Aucun document ni calculatrice autorisé
Toute réponse non justifiée est considérée comme zÈro

Questions :

1. Sachant que la fonction $f : \mathbb{R}^2$ est de classe C^1 et que $f(2,5) = 6$, $f'_x(2,5) = 1$ et $f'_y(2,5) = -1$, donner l'équation de la tangente à la surface déterminée par f et une valeur approché de $f(2,2\ ;\ 4,9)$.
2. Soit P_1 le plan d'équation $x + y = 0$ et P_2 le plan d'équation $x - z = 0$. Notons la droite d l'intersection de ces deux plans. Déterminer la représentation paramétrique de cette droite.
3. Calculer l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et l'utiliser pour résoudre le système $\begin{cases} x + y = & 2 \\ -x + y = & 5 \end{cases}$
4. Donner l'ensemble des solutions de $y'' - 6y' + 9y = 0$.

Exercice 1: On considère la fonction de deux variables $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par la formule

$$g(x, y) = \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} + \frac{x^2 y}{2} - y.$$

1. Expliciter les fonctions partielles $x \mapsto g(x, 0)$ et $y \mapsto g(0, y)$. En déduire que g ne peut admettre ni de minimum global, ni de maximum global.
2. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2 de la fonction g.
3. Vérifier que le point de coordonnées $(0, 1)$ est un point critique de g. Déterminer la nature de ce point
4. Trouver les autres points critiques et leurs natures.

Exercice 2: Soient a, b et c des nombres réels et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$l et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suite définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} = & 5u_n + 2v_n + 4w_n \\ v_{n+1} = & 2u_n + 2v_n + 2w_n \\ w_{n+1} = & 4u_n + 2v_n + 5w_n \end{cases} \quad \text{et } u_0 = a, \quad v_0 = b, \quad w_0 = c.$$

On considère, pour tout entier $n \geq 0$, le vecteur colonne $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'on a l'égalité $X_{n+1} = AX_n$, où A est une matrice à déterminer.
2. En déduire l'égalité $X_n = A^n X_0$, pour tout entier $n \geq 0$.
3. Montrer que $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de A. Calculer A^n.
4. En déduire une formule donnant la valeur de u_n, v_n et w_n en fonction de a, b, c et n.

Exercice 3: Notons Δ la droite $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \ y = 0\}$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$(x,y) \longmapsto \begin{cases} y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

1. Pourquoi est-ce que f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$.
2. Soit $(x_0, 0) \in \Delta$ donné. Montrer que $\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} f(x,y) = 0$ et en déduire que f est continue sur $\mathbb{R}^2$. (indication : $\left|\sin\left(\frac{x}{y}\right)\right| \leq 1$)
3. Montrer que $f'_x(x,y) = \begin{cases} y \cos\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$
4. Donner une expression analogue pour $f'_y(x,y)$.
5. Déterminer les valeurs de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ en $(0,0)$. Pourquoi f n'est pas de classe C^2 ?

Exercice 4: Dans ce problème $y(x)$, $u(x)$ et $z(x)$ sont des fonctions inconnues de x. Pour simplifier l'écriture on les note y, u et z respectivement. Leur domaine de définition est $]0, +\infty[$. On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad xy'' - 2(x-1)y' + (x-2)y = xe^x$$

où $y :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction de x, deux fois dérivable. Le but de ce problème est de résoudre (E).

1. Résoudre l'équation différentielle $xu' + 2u = x$ d'inconnue $u :]0, +\infty[$.
2. A l'aide du changement de fonction inconnue $z' = u$, résoudre $xz'' + 2z' = x$.
3. En fin à l'aide du changement de fonction inconnue $y = ze^x$ résoudre (E).