L1 PCST
Printemps 2015
S2, MathÈmatiques

**Examen - Session 1 - 18 mai 2015**

**Durée : 3h00. Aucun document ni calculatrice autorisé**

**Exercice 1:** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y+3y^3}{x^2+y^2} & \text{pour } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Pourquoi $f$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$?
2. Montrer que $f$ est continue en $(0,0)$ (utiliser les coordonnées polaires) et en déduire que $f$ est continue sur tout $\mathbb{R}^2$.
3. Déterminer les dérivées partielles $f'_x$ et $f'_y$ en tout point $(x,y) \neq (0,0)$.
4. Calculer les dérivées partielles $f'_x(0,0)$ et $f'_y(0,0)$. (Utiliser la définition)
5. Donner la définition d'une fonction de classe $C^1$ et dire pourquoi $f$ n'est pas de classe $C^1$.
6. Déterminer l'équation du plan tangent au graphe de $f$ au point $(1,1,2)$.
7. Montrer que $(2,1,1)$ et $(3,1,0)$ appartiennent à ce plan et en déduire l'équation paramétrique d'une droite appartenant à ce plan.

**Exercice 2:** Soit $g(x,y) = -\cos(x)\cos(y)$.

1. Pourquoi est-ce que $g$ est de classe $C^2$.
2. Montrer que les points critiques sont de formes $(k\pi, l\pi)$ ou $(k\pi + \frac{\pi}{2}, l\pi + \frac{\pi}{2})$ avec $k, l \in \mathbb{Z}$.
3. Déterminer la nature des points $(0,0)$, $(0,\pi)$ et $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. (c-à-d max, min ou point-selle)

**Exercice 3:** Soit $A$ la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Est-ce que $A$ est inversible?
2. Montrer que les seules valeurs propres de $A$ sont 0 et 3.
3. Déterminer les vecteurs propres de $A$ et vérifer que les vecteurs propres associés aux valeurs propres distinctes sont orthogonaux.
4. En déduire un matrice $P$ tel que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
5. Calculer pour tout entier $n$, $A^n$.

**Exercice 4:** Soit $a \in \mathbb{R}$ un réel et $(E)$ l'équation dans $\mathbb{C}$ donnée par

$$(E) \qquad \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n = \frac{1+ia}{1-ia}$$

1. Montrer que $\left|\frac{1+ia}{1-ia}\right| = 1$ et en déduire que $|z-i| = |z+i|$.

2. En posant $z = x+iy$ (avec $x, y \in \mathbb{R}$), dans $|z-i| = |z+i|$, montrer que toutes les solutions de $(E)$ sont réelles.

   On veut résoudre $(E)$ dans le cas où $a = 1$ et $n = 3$.

3. Montrer que $\frac{1+i}{1-i} = i$ et que les racines cubiques de $i$ sont

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \quad , \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \quad , \quad -i$$

4. Résoudre $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^3 = i$.

**Exercice 5:** On se propose de résoudre l'équation différentielle de fonction inconuue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$(E) \qquad y'' + 4y = \cos(x)$$

1. Soit $(E_0)$ l'équation sans second membre attachée à $(E)$ (à dire $y'' + 4y = 0$). Ecrire et résoudre l'équation caractiéristique de $(E_0)$.

2. Déterminer l'ensemble des solutions de $(E_0)$.

3. Montrer que $\frac{\cos(x)}{3}$ est une solution particulère de $(E)$ et en déduire l'ensemble des solutions de $(E)$.

**Exercice 6:** On se propose de résoudre sur $I = ]0, \pi[$ l'équation différentielle $y' \sin(x) - y\cos(x) = (2x+1)\sin^2(x)$.

1. Justifier pourquoi cette équation équivaut sur $I$ à

$$(E) \qquad y' - y\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = (2x+1)\sin(x)$$

2. Présenter l'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' - y\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = 0$.

3. Trouver une solution particulère et puis l'ensemble des solutions de $(E)$.