L1 PCST
2013/2014
S2 Mathématiques

Examen du 13 Mai 2014

Durée : 3 heures. Aucun document ni calculatrice autorisé.

Exercice 1: Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction

$$f(x,y) = \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} \quad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \quad \text{et} \quad f(0,0) = 0.$$

1. Donner la définition d'une fonction (à deux variables) de classe C^1.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
3. Calculer les dérivées partielles secondes mixtes en $(0,0)$ (c-à-d $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$). Que remarque-t-on ?

Exercice 2: On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie comme

$$f(x,y) = 4x^2 + 12xy + 9y^2 + 17.$$

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2 et trouver les points critiques de f.
2. Rappeler la condition suffisant donnée dans le cours pour qu'une fonction de deux variables de classe C^2 possède en un point critique un extremum local.
3. Cette condition est-elle satisfaite ici par f ?
4. montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (2x+3y)^2 + 17$.
5. Notons $E_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = k\}$. Quand est-ce que $E_k \neq \emptyset$? Dessiner E_{17}, E_{18} et E_{19}. (couleurs différentes si possible)
6. Déduire de la question 5 que la fonction f admet un minimum que l'on déterminera. On précisera en quels points ce minimum est atteint.

Exercice 3: Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonomré de $\mathbb{R}^3$ et soit $\vec{u} = (3,-1,2)$ et $\vec{v} = (-2,0,-1)$.

1. Calculer le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et vérifier que ce vecteur est orthogonal à la fois à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.
2. Donner l'équation du plan construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ passant par l'origine O.
3. Soit le vecteur $\vec{w} = (1,1,1)$. Montrer que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.
4. Déterminer le volume du parallépipède construit sur les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

Exercice 4: Soit M la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que les valeurs propres de M sont 0, 1 et 2.
2. Déterminer la matrice P telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale. En déduire M^n.
3. On définit les vecteurs $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et les suites réelles u_n, v_n et w_n comme suit

$$\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & 2u_n + v_n - w_n \\ v_{n+1} & = & v_n + w_n \\ w_{n+1} & = & u_n + v_n \end{array}$$

   (a) Montrer que $X_{n+1} = MX_n$ et en général que $X_n = M^n X_0$.

   (b) En déduire les valeurs des suites u_n, v_n et w_n si $u_0 = -1$, $v_0 = 0$ et $w_0 = 1$.

Exercice 5: Soit A le point $(3,0)$ et d la droite $x = -3$. Ecrivez l'équation cartésienne de la parabole de foyer A et de directrice d. Préciser son axe focal et son sommet.

Exercice 6: Soit $\mathcal{E}$ l'ellipse d'équation cartésienne $4x^2 + 9y^2 = 36$.

1. Montrer que le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{E}$ au point (x_0, y_0) est $-\frac{4x_0}{9y_0}$ et que son équation est $4xx_0 + 9yy_0 = 36$.
2. Soient d et d' deux tangentes à $\mathcal{E}$ issues du point $P(4;0)$.

   (a) Déterminer les cordonnées de leurs points de contact.

   (b) Déterminer les équations des tangentes d et d'.
3. Faites une figure.