UNIVERSITÉ de Cergy-Pontoise

CC1 DE MATHEMATIQUES PCST L1 S2

Vendredi 22 Février 2013 (*durée: 1 heure*)

Documents et calculatrice interdits. Soigner la présentation et la rédaction.

Exercice 1 (*7 points*)

Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{y^4}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2) a) Pour $(x,y) \neq (0,0)$ calculer $\dfrac{\delta f}{\delta x}(x,y)$ et $\dfrac{\delta f}{\delta y}(x,y)$.

b) La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 2 (*6 points*)

Les deux questions sont totalement indépendantes.

1) Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = e^{-x}\cos y - e^{-y}\cos x \ .$$

La fonction f est-elle solution de l'équation de Laplace: $\dfrac{\delta^2 f}{\delta x^2} + \dfrac{\delta^2 f}{\delta y^2} = 0$?

2) a) Chercher une approximation linéaire en $(7,2)$ de la fonction g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x,y) = \ln(x-3y) \ .$$

b) En déduire une valeur approchée de $g(6{,}9\,;\,2{,}06)$.

Exercice 3 (*7 points*)

On se place dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ orthonormé direct de l'espace.

Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$f(x,y) = 2x^2 + y^2 - 2xy + 4x \, .$$

1) a) Déterminer le $\overrightarrow{Grad}\ f(x,y)$. En déduire le point critique (x_0,y_0) de f sur $\mathbb{R}^2$.

b) Justifier que le point critique précédent est un extremum local de f dont on précisera la nature.

2) a) Pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$, calculer $\Delta(h,k) = f(-2+h,-2+k) - f(-2,-2)$.

b) Montrer que, $\forall (h,k) \in \mathbb{R}^2$, $\Delta(h,k) \geqslant 0$.
Que peut-on en déduire ?