

Documents et calculatrice interdits. Soigner la présentation et la rédaction.

Exercice 1 (6,5 points)

Soit la matrice carrée d'ordre 3 définie par $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1) a) Déterminer la matrice $B = 4A - A^2$ puis la matrice $C = A \times B$.

b) En déduire que la matrice A est inversible et donner sa matrice inverse A^{-1} .

2) Soit le système linéaire des 3 équations à 3 inconnues donné par:

$$(S) \begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ -3x + y - z = 2 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

a) En posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, donner un équivalent matriciel du système (S).

b) Soient les plans P_1 , P_2 et P_3 d'équations cartésiennes respectives :

$$2x - y + 3z = 1, \quad -3x + y - z = 2 \quad \text{et} \quad x + y + z = 3.$$

Déterminer $P_1 \cap P_2 \cap P_3$.

Exercice 2 (13,5 points)

1) On considère la matrice: $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

En utilisant la comatrice de P , montrer que sa matrice inverse est :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2) On considère la matrice : $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -3 & 5 & 9 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$

a) Calculer les valeurs propres de M .

b) Déterminer les vecteurs propres de M . En déduire que P est une matrice de passage.

c) Calculer la matrice $D = P^{-1} M P$. Pouvait-on prévoir le résultat ?.

d) En déduire l'expression de M^{42} .