CC2 DE MATHEMATIQUES **PCST L1 S2**

Vendredi 22 Mars 2013 (*durée: 1 heure*)

Documents et calculatrice interdits. Soigner la présentation et la rédaction.

Exercice 1 (*7,5 points*)

L'espace est muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$).

On note (D) la droite passant par les points : A(1 , – 2 , –1) et B(3 , – 5 , – 2).

1. Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (D) est :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - 3t \\ z = -1 - t \end{cases} \quad \text{avec} \quad t \in \mathbb{R}.$$

2. On note (D') la droite ayant pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2 - k \\ y = 1 + 2k \\ z = k \end{cases} \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{R}.$$

Montrer que les droites (D) et (D') ne sont pas coplanaires.

3. a) On donne les points C(2 , 1 , 0) et E (3 , –1 , –1).
Les points A, B, C et E sont-ils coplanaires ? Justifier.

b) Calculer l'aire du triangle ABC et le volume du tétraèdre ABCE.

Exercice 2 (*7,5 points*)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) , on considère les points:

A(1 , 1 , 0) , B(1 , 2 , 1) et C(3 , –1 , 2).

1. a) Justifier que les points A, B et C déterminent un plan unique.

b) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

2. On considère les plans (P) et (Q) d'équations respectives :

$$x + 2y - z - 4 = 0 \quad \text{et} \quad 2x + 3y - 2z - 5 = 0 \ .$$

Démontrer que l'intersection des plans (P) et (Q) est une droite ($\mathscr{D}$) dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 \\ z = t \end{cases} \quad \text{avec} \quad t \in \mathbb{R}.$$

3. a) Quelle est l'intersection des trois plans (ABC) , (P) et (Q) ?

b) Retrouver le résultat précédent en résolvant , à l'aide d'un équivalent matriciel , un système linéaire de trois équations à trois inconnues.

Exercice 3 (*5 points*)

Soients les matrices $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que : $M^2 = 3M$ et $L^2 = 3L$. Calculer ML et LM .

2. On pose $A = M + 2L$.

Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad A^n = 3^{n-1}M + 2 \times 6^{n-1}L$