UNIVERSITÉ de Cergy-Pontoise

EXAMEN DE MATHEMATIQUES

Mardi 14 Mai 2013

durée: 3 heures

Documents et calculatrice interdits. Soigner la présentation et la rédaction.
Le sujet comporte ***4 exercices*** *sur* ***3 pages****.* *Barème prévisionnel : 6 – 4 – 6 – 4.*

Exercice 1 — Fonctions à deux variables

Les quatre parties A, B, C et D sont totalement indépendantes.

A. Calculer $\displaystyle\lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ (on pourra utiliser les coordonnées polaires).

B. Soit
$$f:\ \mathbb{R}^2-\{(0,0)\} \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \frac{y^2\sin^2 x}{x^4+y^4}$$

1) Calculer $f(x,0)$ et $f(x,x)$.
2) Que peut-on dire de $\displaystyle\lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} f(x,y)$?

C. Soit
$$g:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \frac{x+y}{1+x^2+y^2}$$

1) En justifiant que g est de classe C^1, calculer les dérivées partielles premières.

2) a) Donner l'équation du plan tangent à la surface S de g en (0, 0).
b) En déduire une approximation linéaire de $g(0{,}1\,;-0{,}2)$.

D. Soit
$$h:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto 3x^2y+y^3-3x^2-3y^2+2$$

1) En justifiant que h est de classe C^2, calculer les dérivées partielles premières et secondes de h.

2) Rechercher les quatre points critiques de h.

3) Les points critiques de h sont-ils des extrema locaux de h ?

Exercice 2 — Géométrie

Soit $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$ un repère orthonormé direct de l'espace.
On donne les points A (2 ; 1 ; –2), B (1 ; 2 ; 2) et C (4 ; –1 ; 5).

1) a) Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{n}=\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}$.
b) En déduire que les points O , A et B déterminent un plan unique P.

2) a) Donner une équation cartésienne du plan P.

b) Calculer l'aire du triangle OAB.

3) a) Démontrer que les points O, A, B et C sont non coplanaires.

b) On admet que le volume du tétraèdre OABC est donné par $\mathrm{V} = \frac{1}{6}\left| \left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) . \overrightarrow{\mathrm{OC}} \right|$

Calculer V.

c) Retrouver V en utilisant le **2)**. *Rappel* : $\mathrm{V} = \frac{1}{3}(\text{aire de la base}) \times \text{hauteur}$.

<u>Exercice 3</u> Matrices

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1) a) Montrer que le polynôme caractéristique de A est donné par:

$$P(\lambda) = (1-\lambda)(-1-\lambda)(2-\lambda)$$

En déduire les valeurs propres de A.

b) Montrer qu'une matrice de passage de A est donnée par: $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

c) Calculer P^{-1}. En déduire la matrice $D = P^{-1} A P$.

2) Calculer A^6.

3) Soit y une fonction de la variable t, trois fois dérivable, vérifiant:

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0 \quad (1)$$

avec $y' = \frac{dy}{dt}$, $y'' = \frac{d^2 y}{dt^2}$ et $y''' = \frac{d^3 y}{dt^3}$

a) On pose : $Y = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$ et $\frac{dY}{dt} = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \\ y'''(t) \end{pmatrix}$

Montrer que : $\frac{dY}{dt} = AY$.

b) On pose : $X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$ avec $X = P^{-1} Y$.

Montrer l'équivalence: $\frac{dY}{dt} = AY \Leftrightarrow \frac{dX}{dt} = DX$

c) Déterminer X vérifiant $\frac{dX}{dt} = DX$.

d) En déduire Y puis la solution générale de l'équation différentielle (1).

e) Déterminer la solution de l'équation (1) vérifiant: $y(0) = 1$ et $y'(0) = y''(0) = 4$.

Exercice 4 Coniques

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\,)$.

1) Soit la courbe (C) d'équation $2x^2 + 6y^2 = 3$.

a) Montrer que l'équation de (C) peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2} = 1.$$

b) Préciser la nature de (C). Donner les coordonnées des sommets et des foyers.

Construire (C) (*on prendra* $\|\vec{i}\| = 3$ cm *et on donne* $\sqrt{\frac{3}{2}} \approx 1{,}2$ *puis* $\sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0{,}7$).

2) Un point mobile M (t) se déplace dans le plan. Son mouvement est défini par:

$$\begin{cases} X(t) = \sin(\pi t) \\ Y(t) = \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right) \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

a) Montrer que la trajectoire T de M (t) a pour équation:

$$X^2 + Y^2 - XY = \frac{3}{4}$$

b) On pose : $$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Donner l'équation de T en fonction de x et y.
En déduire, à l'aide de (C), la construction de T.