Corrigé de l'examen de mathématiques de PCST L1 S2

du Mardi 14 Mai 2013

Exercice 1

A. Posons $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ avec $r = \sqrt{x^2+y^2}$

$$\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \frac{r^3\cos^3\theta + r^3\sin^3\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = \frac{r^3(\cos^3\theta+\sin^3\theta)}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)} = r(\cos^3\theta+\sin^3\theta)$$

Or $\left|\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| = r\left|\cos^3\theta+\sin^3\theta\right|$

et $0 \leqslant r\left|\cos^3\theta+\sin^3\theta\right| \leqslant r(\left|\cos^3\theta\right| + \left|\sin^3\theta\right|) \leqslant 2r$

Or quand $(x,y)\to(0,0)$ alors $r\to 0$ donc $2r\to 0$.

Conclusion: $\boxed{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0}$

B. 1) $f(x,0) = \dfrac{0}{x^4} = 0$ et $f(x,x) = \dfrac{x^2\sin^2 x}{2x^4} = \dfrac{\sin^2 x}{2x^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2$

2) $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x) = \dfrac{1}{2}$

Les limites étant différentes $f(x,y)$ n'a pas de limite quand $(x,y)\to(0,0)$

C. 1) g est de classe C^1 comme somme et quotient de fonctions de classe C^1.

- $$\frac{\delta g}{\delta x}(x,y) = \frac{1(1+x^2+y^2)-(x+y)(2x)}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{1+x^2+y^2-2x^2-2xy}{(1+x^2+y^2)^2}$$

  donc $\boxed{\dfrac{\delta g}{\delta x}(x,y) = \dfrac{1-x^2+y^2-2xy}{(1+x^2+y^2)^2}}$

- $$\frac{\delta g}{\delta y}(x,y) = \frac{1(1+x^2+y^2)-(x+y)(2y)}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{1+x^2+y^2-2xy-2y^2}{(1+x^2+y^2)^2}$$

  donc $\boxed{\dfrac{\delta g}{\delta y}(x,y) = \dfrac{1+x^2-y^2-2xy}{(1+x^2+y^2)^2}}$

2) a) L'équation du plan tangent à la surface S de g en (0, 0) est de la forme:

$$\frac{\delta g}{\delta x}(0,0)\,(x-0) + \frac{\delta g}{\delta y}(0,0)\,(y-0) = z - g(0,0)$$

$$1(x-0)+1(y-0) = z-0$$

L'équation demandée est donc $\boxed{x+y-z=0}$

b) $g(0{,}1\,;-0{,}2)\approx z$ donc $g(0{,}1\,;-0{,}2)\approx 0{,}1-0{,}2$ soit $\boxed{g(0{,}1\,;-0{,}2)\approx -0{,}1}$

D. 1) h est de classe C^2 comme produits et somme de fonctions de classe C^2.

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{\delta h}{\delta x}(x,y) = 6xy-6x \quad \text{et} \quad \dfrac{\delta h}{\delta y}(x,y) = 3x^2+3y^2-6y \\ \dfrac{\delta^2 h}{\delta x^2}(x,y) = 6y-6 \quad , \quad \dfrac{\delta^2 h}{\delta x\,\delta y} = \dfrac{\delta^2 h}{\delta y\,\delta x} = 6x \quad \text{et} \quad \dfrac{\delta^2 h}{\delta y^2}(x,y) = 6y-6 \end{array}}$$

2) Les points critiques sont les points qui annulent simultanément les dérivées premières d'où le système:

$$\begin{cases} 6x\,y - 6x = 0 \\ 3x^2 + 3y^2 - 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x(y-1) = 0 \\ 3x^2 + 3y^2 - 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \quad ou \quad y = 1 \\ 3x^2 + 3y^2 - 6y = 0 \end{cases}$$

Si $x = 0$ alors $3y^2 - 6y = 0 \Leftrightarrow 3y(y-2) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \quad ou \quad y = 2$

Si $y = 1$ alors $3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \quad ou \quad x = -1$

$\boxed{\text{Les points critiques sont donc } (0,0)\ ,\ (0,2)\ ,\ (1,1) \text{ et } (-1,1).}$

3) Examinons ces points critiques.

- **Pour (0, 0)** $r = \dfrac{\delta^2 h}{\delta x^2}(0,0) = -6$, $s = \dfrac{\delta^2 h}{\delta x\, \delta y}(0,0) = 0$ et $t = \dfrac{\delta^2 h}{\delta y^2}(0,0) = -6$

  $r\,t - s^2 = 36$ $36 > 0$ et $r < 0$. Donc <u>(0, 0) est un maximum local</u>.

- **Pour (0, 2)** $r = \dfrac{\delta^2 h}{\delta x^2}(0,2) = 6$, $s = \dfrac{\delta^2 h}{\delta x\, \delta y}(0,2) = 0$ et $t = \dfrac{\delta^2 h}{\delta y^2}(0,2) = 6$

  $r\,t - s^2 = 36$ $36 > 0$ et $r > 0$. Donc <u>(0, 2) est un minimum local</u>.

- **Pour (1, 1)** $r = \dfrac{\delta^2 h}{\delta x^2}(1,1) = 0$, $s = \dfrac{\delta^2 h}{\delta x\, \delta y}(1,1) = 6$ et $t = \dfrac{\delta^2 h}{\delta y^2}(1,1) = 0$

  $r\,t - s^2 = -36$ $-36 < 0$. Donc <u>(1, 1) est un point col</u>.

- **Pour (–1, 1)** $r = \dfrac{\delta^2 h}{\delta x^2}(-1,1) = 0$, $s = \dfrac{\delta^2 h}{\delta x\, \delta y}(-1,1) = -6$ et $t = \dfrac{\delta^2 h}{\delta y^2}(-1,1) = 0$

  $r\,t - s^2 = -36$ $-36 < 0$. Donc <u>(–1, 1) est un point col</u>.

Exercice 2

1) a) $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{n} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $\vec{n} \neq \vec{0}$ donc $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ ne sont pas colinéaires.
Par conséquent les points O, A et B déterminent un plan unique P.

2) a) M (x, y, z) est un point de P si et seulement si $\overrightarrow{OM}\,.\,(\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}) = 0$ donc si et seulement si $6x - 6y + 3z = 0$. Une équation cartésienne du plan P est donc $\boxed{2x - 2y + z = 0}$

b) $\mathcal{A}\text{(AOB)} = \dfrac{1}{2}\left\| \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} \right\| = \dfrac{1}{2}\sqrt{6^2 + (-6)^2 + 3^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{81}$

donc $\boxed{\mathcal{A}\text{(AOB)} = \dfrac{9}{2} = 4{,}5 \quad \text{(unités d'aire)}}$.

3) a) Regardons si les coordonnées du point C vérifient l'équation du plan P.
$2x_C - 2y_C + z_C = 2 \times 4 - 2 \times (-1) + 5 = 15 \neq 0$.
Donc le point C n'est pas un point du plan P: <u>les points O, A, B et C ne sont pas coplanaires</u>.

b) $V = \dfrac{1}{6}\left| (\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB})\,.\,\overrightarrow{OC} \right| = \dfrac{1}{6}\left| 6 \times 4 - 6 \times (-1) + 3 \times 5 \right| = \dfrac{1}{6}\left| 45 \right| = \dfrac{45}{6}$ donc $\boxed{V = \dfrac{15}{2} = 7{,}5 \quad \text{(unités de volume)}}$.

c) Le tétraèdre OABC a pour base le triangle OAB et pour hauteur h la distance du point C au plan P.

$$h = \frac{\left| 2x_c - 2y_c + z_c \right|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{\left| 2 \times 4 - 2 \times (-1) + 5 \right|}{\sqrt{9}} = \frac{15}{3} = 5$$

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}\text{(AOB)} \times h = \frac{1}{3} \times 4{,}5 \times 5 = 1{,}5 \times 5 = 7{,}5$$

On retrouve bien le même résultat.

Exercice 3

1) a) $P(\lambda) = d\acute{e}t(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} - 0 + (-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{vmatrix} = -\lambda[-\lambda(2-\lambda) - 1] - 2\times 1$

$P(\lambda) = \lambda^2(2-\lambda) + \lambda - 2 = (2-\lambda)(\lambda^2 - 1) = (2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1)$

Donc on a bien $\boxed{P(\lambda) = (1-\lambda)(-1-\lambda)(2-\lambda)}$

Les valeurs propres de A sont les solutions de $P(\lambda) = 0$ soit $(1-\lambda)(-1-\lambda)(2-\lambda) = 0$.

Les valeurs propres sont donc $\boxed{\lambda = 1 \;,\quad \lambda = -1 \quad \text{et} \quad \lambda = 2}$.

b) Une matrice de passage est obtenue à partir des vecteurs propres.

Pour chaque valeur propre λ on cherche $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ c'est-à-dire:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \lambda x \\ z = \lambda y \\ -2x + y + 2z = \lambda z \end{cases}$$

• Pour $\lambda = 1$ on obtient le système: $\begin{cases} y = x \\ z = y \\ -2x + y + z = 0 \end{cases}$. On peut choisir $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

• Pour $\lambda = -1$ on obtient le système: $\begin{cases} y = -x \\ z = -y \\ -2x + y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = x \\ -2x - x + 3x = 0 \end{cases}$.

On peut choisir $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ou encore $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

• Pour $\lambda = 2$ on obtient le système: $\begin{cases} y = 2x \\ z = 2y \\ -2x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ z = 4x \\ -2x + 2x = 0 \end{cases}$

On peut choisir $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Une matrice de passage est bien $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}}$

c) $d\acute{e}t\, P = (4+2) - (-4+1) + (-2-1) = 6 + 3 - 3 = 6$

$Com\, P = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 3 & 3 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ donc $\widetilde{P} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\boxed{P^{-1} = \frac{1}{6}\widetilde{P} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}$

$$D = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On obtient bien la matrice diagonale des valeurs propres $\boxed{D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$

2) Comme $D = P^{-1} A P$ alors $A = P D P^{-1}$ et $A^6 = P D^6 P^{-1}$

Donc $$A^6 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 64 \\ 1 & 1 & 128 \\ 1 & -1 & 256 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 & 0 & 21 \\ -42 & 1 & 42 \\ -84 & 0 & 85 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^6 = \begin{pmatrix} -20 & 0 & 21 \\ -42 & 1 & 42 \\ -84 & 0 & 85 \end{pmatrix}}$$

3) a) $$A\,Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \\ -2y(t) + y'(t) + 2y''(t) \end{pmatrix}$$

Or d'après l'équation (1) $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$ on peut dire que $y'''(t) = -2y(t) + y'(t) + 2y''(t)$

Donc $A\,Y = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \\ y'''(t) \end{pmatrix}$. On a bien $\boxed{\dfrac{dY}{dt} = A\,Y}$

b) $$\frac{dY}{dt} = A\,Y \Leftrightarrow \frac{dY}{dt} = P\,D\,P^{-1}Y \Leftrightarrow \frac{dY}{dt} = P\,D\,X \Leftrightarrow P^{-1}\frac{dY}{dt} = D\,X \Leftrightarrow \frac{dP^{-1}Y}{dt} = D\,X \Leftrightarrow \frac{dX}{dt} = D\,X$$

On a bien $\boxed{\dfrac{dY}{dt} = A\,Y \Leftrightarrow \dfrac{dX}{dt} = D\,X}$

c) $$\frac{dX}{dt} = D\,X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) \\ x_2'(t) = -x_2(t) \\ x_3'(t) = 2x_3(t) \end{cases}$$

- $x_1'(t) = x_1(t) \Leftrightarrow \dfrac{x_1'(t)}{x_1(t)} = 1$ d'où $\ln x_1(t) = t + k_1$ soit $x_1(t) = K_1 e^{t}$
- $x_2'(t) = -x_2(t) \Leftrightarrow \dfrac{x_2'(t)}{x_2(t)} = -1$ d'où $\ln x_2(t) = -t + k_2$ soit $x_2(t) = K_2 e^{-t}$
- $x_3'(t) = 2x_3(t) \Leftrightarrow \dfrac{x_3'(t)}{x_3(t)} = 2$ d'où $\ln x_3(t) = 2t + k_3$ soit $x_3(t) = K_3 e^{2t}$

Donc $\boxed{X = \begin{pmatrix} K_1 e^{t} \\ K_2 e^{-t} \\ K_3 e^{2t} \end{pmatrix}}$

d) $X = P^{-1} Y$ donc $Y = P\,X$

d'où $$Y = P\,X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y(t) = x_1(t) - x_2(t) + x_3(t) \\ y'(t) = x_1(t) + x_2(t) + 2x_3(t) \\ y''(t) = x_1(t) - x_2(t) + 4x_3(t) \end{cases}$$

On a donc $$\boxed{Y = \begin{pmatrix} K_1 e^{t} - K_2 e^{-t} + K_3 e^{2t} \\ K_1 e^{t} + K_2 e^{-t} + 2K_3 e^{2t} \\ K_1 e^{t} - K_2 e^{-t} + 4K_3 e^{2t} \end{pmatrix}}$$

La solution générale de l'équation (1) est $\boxed{y(t) = K_1 e^{t} - K_2 e^{-t} + K_3 e^{2t}}$

e) $\begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=4 \\ y''(0)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K_1-K_2+K_3=1 \\ K_1+K_2+2K_3=4 \\ K_1-K_2+4K_3=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K_3=1-K_1+K_2 \\ K_1+K_2+2-2K_1+2K_2=4 \\ K_1-K_2+4-4K_1+4K_2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K_3=1-K_1+K_2 \\ -K_1+3K_2=2 \\ -3K_1+3K_2=0 \end{cases}$

$\begin{cases} K_3=1-K_1+K_2 \\ 2K_1=2 \\ K_1=K_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K_3=1 \\ K_1=1 \\ K_2=1 \end{cases}$

La solution cherchée est donc $\boxed{y(t)=e^{t}-e^{-t}+e^{2t}}$

Exercice 4

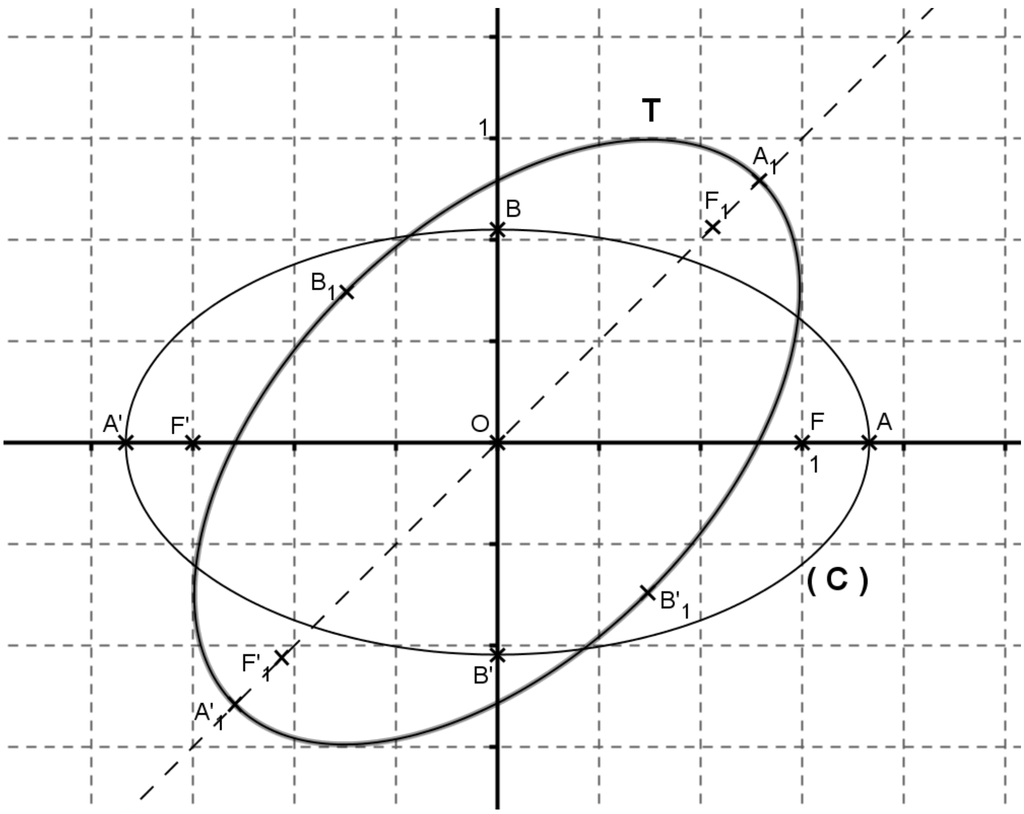
1) a) $2x^2+6y^2=3 \Leftrightarrow \frac{2}{3}x^2+2y^2=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{3}{2}}+\frac{y^2}{\frac{1}{2}}=1 \Leftrightarrow \boxed{\frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2}=1}$

b) L'équation de (C) est celle d'une ellipse.

L'ellipse (C) a pour sommets $\boxed{A\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\,;0\right) \quad , \quad A'\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\,;0\right) \quad , \quad B\left(0\,;\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \quad \text{et} \quad B'\left(0\,;-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}$

Pour les coordonnées des foyers, il faut calculer $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}=\sqrt{1}=1$

Les foyers sont donc $\boxed{F\,(1\,;0) \quad \text{et} \quad F'\,(-1\,;0)}$



2) a) $X^2+Y^2-XY=\sin^2(\pi t)+\sin^2(\pi t+\frac{\pi}{3})-\sin(\pi t)\ \sin(\pi t+\frac{\pi}{3})$

$\sin(\pi t+\frac{\pi}{3})=\sin(\pi t)\cos\frac{\pi}{3}+\cos(\pi t)\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\sin(\pi t)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\pi t)$

On a donc :

$$X^2+Y^2-XY=\sin^2(\pi t)+\frac{1}{4}\sin^2(\pi t)+\frac{3}{4}\cos^2(\pi t)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\pi t)\cos(\pi t)-\frac{1}{2}\sin^2(\pi t)-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\pi t)\cos(\pi t)$$

$$X^2+Y^2-XY=\frac{3}{4}\sin^2(\pi t)+\frac{3}{4}\cos^2(\pi t) \quad\Leftrightarrow\quad X^2+Y^2-XY=\frac{3}{4}\left(\sin^2(\pi t)+\cos^2(\pi t)\right)$$

La trajectoire T de M (t) a bien pour équation : $\boxed{X^2+Y^2-XY=\frac{3}{4}}$

b) $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x\cos\frac{\pi}{4}-y\sin\frac{\pi}{4} \\ x\sin\frac{\pi}{4}+y\cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \end{pmatrix}$

$$X^2+Y^2-XY=\frac{3}{4} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{2}(x-y)^2+\frac{1}{2}(x+y)^2-\frac{1}{2}(x-y)(x+y)=\frac{3}{4}$$

$$X^2+Y^2-XY=\frac{3}{4} \quad\Leftrightarrow\quad x^2+y^2-2xy+x^2+y^2+2xy-x^2+y^2=\frac{3}{2} \quad\Leftrightarrow\quad x^2+3y^2=\frac{3}{2}$$

L'équation de T en fonction de x et y est donc $2x^2+6y^2=3$ qui est l'équation de (C).

Comme la matrice $\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$ est la matrice d'une rotation de centre O ,d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de sens direct ,

T est obtenue à partir de (C) par cette rotation.