PCST - Mathématiques S2

Contrôle continu n° 3

Durée : 1h

Il faut soigner la rédaction et la présentation. Souligner ou encadrer vos résultats.
Les documents et calculatrices sont interdits.

Exercice 1 (6 points, environ 20 minutes)**.**

1) On considère la matrice suivante où m est un paramètre réel :

$$M = \begin{pmatrix} m-6 & -10 & 2 \\ 3 & m+3 & 0 \\ 6 & 8 & m-1 \end{pmatrix}$$

a) Montrer que le déterminant de M est égal à $m^3 - 4m^2 + 3m$.

b) Déterminer les valeurs du paramètre m pour lesquelles M est inversible.

c) Calculer la matrice inverse de M pour $m = 2$.

2) On considère le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (m-6)x - 10y + 2z & = & 4 \\ 3x + (m+3)y & = & -1 \\ 6x + 8y + (m-1)z & = & 1 \end{array} \right.$$

a) Donner un équivalent matriciel de ce système.

b) Résoudre ce système pour $m = 2$ puis pour $m = 0$.

Exercice 2 (4+2 points, environ 15+10 minutes)**.**

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 10 & 1 & 6 \\ 25 & -7 & 14 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

1) Justifier que P est inversible et calculer sa matrice inverse P^{-1}.

2) Calculer le produit matriciel $P^{-1}AP$.

3) La matrice A est-elle diagonalisable ? Si oui, donner ses valeurs propres et des vecteurs propres associés (indication : aucun calcul n'est nécessaire pour cette question).

4) **(hors barème)** Résoudre le système d'équations différentielles suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & -3x(t) + 2y(t) - 2z(t) \\ y'(t) & = & 10x(t) + y(t) + 6z(t) \\ z'(t) & = & 25x(t) - 7y(t) + 14z(t) \end{array} \right.$$

Tourner la page S.V.P.

Exercice 3 (7 points, environ 20 minutes)**.**
On considère la matrice suivante :

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

1) Montrer par récurrence pour tout $n \geqslant 1$ que :

$$B^n = \begin{pmatrix} 3 - 2^{n+1} & -2 + 2^{n+1} \\ 3 - 3 \times 2^n & -2 + 3 \times 2^n \end{pmatrix}$$

2) Diagonaliser la matrice B. C'est-à-dire :

a) Montrer que les valeurs propres de B sont égales à 1 et 2.

b) Déterminer deux vecteurs propres associés aux valeurs propres de B.

c) Déterminer une matrice inversible Q telle que $D = Q^{-1}BQ$ soit une matrice diagonale que l'on précisera (indication : le calcul du produit matriciel $Q^{-1}BQ$ n'est pas nécessaire).

3) En utilisant le résultat obtenu à la question **2)**, retrouver le résultat de la question **1)**.

Question de cours 4 (3 points, maximum 5 minutes)**.**
Rappeler la nature, l'excentricité, les foyers, les directrices et les sommets des coniques suivantes :

1) $(\mathcal{C}_1)$: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ pour $a > b$

2) $(\mathcal{C}_2)$: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$