

Documents et calculatrices interdits. Présentation à soigner : souligner vos résultats

EXERCICE 1 Les deux questions sont totalement indépendantes (4 points – 15 min)

1) Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs de l'espace vérifiant :

$$\begin{cases} \vec{u} \neq \vec{0} \\ \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w} \\ \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{w} \end{cases}$$

Que peut-on en déduire concernant les vecteurs \vec{v} et \vec{w} ?

2) Dans un repère orthonormé de l'espace soient les points $A(1,3,2)$, $B(3,-1,6)$, $C(5,2,0)$, $D(3,6,-4)$.

Appartiennent-ils à un même plan ?

EXERCICE 2 (10 points – 25 min)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct .

1) Soient les deux plans P et P' d'équation cartésienne respective : $2x + 3y + 5z = 8$ et $x + 4y + 5z = 2$.

a) Montrer que les deux plans sont sécants.

b) Déterminer un point A et un vecteur directeur \vec{u} de la droite (d) d'intersection.

c) Déterminer la distance du point $B(0,0,-\frac{19}{5})$ à la droite (d) .

2) Soit le plan P'' contenant les trois points $C(1,1,0)$, $D(4,-2,0)$ et $E(8,4,1)$.

a) Donner une équation cartésienne du plan P'' .

b) Caractériser $P \cap P' \cap P''$.

c) Soit $I(5,-1,\frac{1}{5})$. Calculer $\overrightarrow{IB} \cdot \vec{u}$. Retrouver le résultat du 1)c).

EXERCICE 3 (6 points – 20 min)

Soient les matrices $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et I_3 la matrice identité carrée d'ordre 3.

1) Calculer M^2 et M^3 .

2) a) Expliciter la matrice $A = 3M - 2I_3$. Comparer les matrices A et M^2 .

b) Retrouver le résultat de M^3 en utilisant le a).

Hors barème : (Bonus +2)

3) En utilisant le 2) a) montrer que : $I_3 = \frac{1}{2} \cdot M \times (3I_3 - M)$.

En déduire une matrice M' vérifiant $M \times M' = I_3$. A-t-on $M' \times M = I_3$? Que peut-on conclure ?

