UNIVERSITÉ
de Cergy-Pontoise

CONTRÔLE DE MATHEMATIQUES DU 24/02/12 (durée 1 heure)

Les résultats doivent être soulignés. Les calculatrices sont interdites. Les téléphones doivent être éteints.

EXERCICE 1 (9 pts – 25 min)

Soit la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2x^2y}{x^2+y^2} & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

1)a) En utilisant les coordonnées polaires, déterminer la limite de f en (0,0).

En déduire que f est continue sur tout $\mathbb{R}^2$.

b) Calculer, sous réserve d'existence, les dérivées partielles d'ordre 1 de f.

c) f est-elle de classe C^1 sur tout $\mathbb{R}^2$?

2) a) Déterminer une équation du plan tangent P en M$(-1,1,1)$ à la surface S représentant f.

b) En déduire une approximation linéaire de $f(-0{,}99;1{,}01)$.

3) **(Hors barème)**

Déterminer une approximation quadratique de $f(-0{,}99;1{,}01)$.

EXERCICE 2 (8 pts – 25 min)

Soit la fonction g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $g(x,y)=xye^{x-y}$

1) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de g . En déduire que les deux seuls points critiques de g sont donnés par $(0,0)$ et $(-1,1)$.

2) a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2.

b) En déduire la nature des points critiques précédents (maximum , minimum, point selle).

EXERCICE 3 (3 pts – 10 min)

Soit l'équation d'ondes : $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$ avec c une constante réelle.

Soit la fonction u de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $u(x,t)=e^{\,i(wt-kx)}$ avec w,k deux constantes réelles.

Montrer que u est solution de l'équation d'ondes si et seulement si $w^2=c^2k^2$.

Indication : les exponentielles complexes se dérivent comme les exponentielles réelles.

i , tel que $i^2=-1$, est une constante.