PCST - Mathématiques S2

Examen session n° 2

Durée : 2h

Il faut soigner la rédaction et la présentation. Souligner vos résultats.
Les documents et calculatrices sont interdits.

Exercice 1

1) On considère la fonction de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ suivante :

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \ln\left(x^2+y^2\right) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Déterminer, à l'aide des coordonnées polaires, la limite en $(0,0)$ de la fonction f.
En déduire que f est continue sur tout $\mathbb{R}^2$.

b) Calculer, sous réserve d'existence, les dérivées partielles premières de f.

c) f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout $\mathbb{R}^2$?

d) Déterminer l'équation du plan tangent à la surface $z = f(x,y)$ au point $(x,y) = (1,0)$.

2) On considère la fonction de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ suivante :

$$g(x,y) = 2x^3 - 12x - 6xy + 3y^2$$

a) Déterminer les points critiques de g.

b) En déduire l'étude des extrema locaux de g.

c) L'extremum obtenu à la question précédente est-il absolu ?

Exercice 2

L'espace E est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1) On considère les plans suivants :

$$\mathcal{P}_1 : x - 2y - z = -3 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{P}_2 : 2x + 4y - z = 7$$

a) Etudier la position relative de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.
Préciser la nature de leur intersection que l'on notera $\mathcal{D}$.

b) Vérifier que les points $A(-2,2,-3)$ et $B(4,1,5)$ appartiennent à $\mathcal{D}$.

c) En déduire une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$.

2) Soit le point $M(1,0,1)$.

a) Calculer $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}$.

b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ contenant $\mathcal{D}$ et M est donnée par :

$$\mathcal{P} : 4x - 3z = 1$$

c) Calculer la distance du point $C(1,2,-4)$ au plan $\mathcal{P}$.

Exercice 3

1) On considère la matrice suivante :

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) En utilisant la comatrice de P, montrer que sa matrice inverse est :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

b) En utilisant un équivalent matriciel, résoudre le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -2x + y + 2z & = & 1 \\ -3x + 3y + z & = & -2 \\ x - y & = & 1 \end{array} \right.$$

2) On considère la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -3 & 5 & 9 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

a) Calculer les valeurs propres de M.

b) Déterminer les vecteurs propres de M. En déduire que P est une matrice de passage.

c) Calculer la matrice $D = P^{-1}MP$. Justifier votre résultat à l'aide des questions précédentes.

d) En déduire l'expression de M^{42}.

Exercice 4

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1) Caractériser l'ensemble des points $M(x,y)$ du plan vérifiant :

$$16x^2 - 9y^2 + 36y - 180 = 0$$

On précisera l'excentricité, le centre, les foyers, les directrices et les sommets.

2) Etudier puis tracer l'allure de la courbe paramétrée suivante :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & t^3 - 3t \\ y(t) & = & \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{t^2} \end{array} \right.$$