UNIVERSITÉ de Cergy-Pontoise

EXAMEN DE MATHEMATIQUES DU 24/05/12 (de 14h à 17h)

Vous devez soigner la rédaction et la présentation de votre copie et encadrer, dans la mesure du possible, vos résultats. Aucun document n'est autorisé et l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Barème prévisionnel : 3 – 4 – 4 -5 - 4

EXERCICE 1 Equations aux dérivées partielles

1) Vérifier si chacune des fonctions suivantes est une solution de l'équation de Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

a) $u(x,y)= x^2+y^2$ b) $u(x,y)=ln\sqrt{x^2+y^2}$ c) $u(x,y)=e^{-x}cosy-e^{-y}cosx$

2) Montrer que chacune des fonctions suivantes est une solution de l'équation des ondes $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

avec a une constante réelle non nulle.

a) $u(x,t)=\ln(x+at)+\sin(x-at)$

b) $u(x,t)= f(x+at)+g(x-at)$ avec f,g deux fonctions de classe C^2.

3) Vérifier que la fonction définie par $u(x,t)=e^{-\propto^2k^2t}\sin(kx)$ ($\propto, k$ étant deux constantes réelles)

est une solution de l'équation de chaleur $\frac{\partial u}{\partial t}=\propto^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

EXERCICE 2 Recherche d'extrema

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y)=x^4+y^4-4xy+1$

1) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2.

2)a) Montrer que la fonction f admet trois points critiques.

b) Donner la nature des points critiques précédents (extrema locaux ou point-selle).

EXERCICE 3 Géométrie dans l'espace

L'espace E est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soit les trois plans P_1 , P_2 , P_3 d'équations respectives : $2x-y+3z=1$, $-3x+y-z=2$, $x+y+z=3$

On se propose de déterminer l'intersection de ces trois plans par deux méthodes différentes.

../..

Partie 1

1) a) En utilisant des vecteurs normaux aux deux plans P_1 et P_2 , justifier qu'ils sont sécants.

b) Déterminer une représentation paramétrique de l'ensemble $\{d\} = P_1 \cap P_2$.

c) Donner la nature et les caractéristiques de d.

2) En utilisant l'ensemble $\{d\}$ caractériser $P_1 \cap P_2 \cap P_3$.

Partie 2

Soit la matrice carrée d'ordre 3 définie par : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1) a) Déterminer la matrice $B = 4A - A^2$ puis la matrice $C = A \times B$.

b) En déduire que la matrice A est inversible et donner sa matrice inverse A^{-1}.

2) Soit le système linéaire des 3 équations à 3 inconnues donné par :

$$(S) \quad \begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ -3x + y - z = 2 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

a) En posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, donner un équivalent matriciel du système (S).

b) En utilisant le 1)b) de la partie 2 retrouver $P_1 \cap P_2 \cap P_3$.

EXERCICE 4 Etude de suites

1) Soit le polynôme P défini par : $P(x) = -x^3 + 17x^2 - 66x + 72$.

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x - 2)Q(x)$ où $Q(x)$ est un polynôme que l'on précisera.

Soient les suites numériques, (u_n) , (v_n) et (w_n) définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ v_0 = 1 \\ w_0 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 5u_n - 5v_n + 2w_n \\ v_{n+1} = -u_n + 7v_n - 4w_n \\ w_{n+1} = 2u_n - 5v_n + 5w_n \end{cases}$$

2) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice M vérifiant: $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = MX_n$

b) Déterminer les valeurs propres puis les vecteurs propres associés de la matrice M.

3) a) Montrer que l'on peut choisir comme matrice de passage la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) Calculer sa matrice inverse P^{-1}. En déduire la matrice $D = P^{-1}MP$.

c) Calculer, pour tout n entier naturel non nul : D^n puis M^n.

../..

4) a) Déterminer l'expression de X_n en fonction de n.

b) En déduire la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de la suite (X_n) .

EXERCICE 5 Coniques

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé (O;$\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$)

1) Soit la courbe paramétrée définie par : $\forall t \in [-\pi, \pi[$, $\begin{cases} x(t) = -1 + 2\cos t \\ y(t) = \sqrt{3}\sin t \end{cases}$

En donner une équation cartésienne . En déduire qu'il s'agit d'une conique à préciser.

2) a) Déterminer la nature de l'ensemble C des points $M(x; y)$ tels que :

$$3x^2 + 4y^2 + 6x - 9 = 0$$

b) Donner les éléments caractéristiques de la courbe C (sommets, foyers, directrices) et la représenter.

3) On se propose d'établir une équation polaire de C.

A tout point $M(x; y) \in C$ on associe son affixe $z = x + iy$. On pose $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ et et l'on note θ un argument de z.

a) Montrer que : $\rho = \frac{1}{2}(3 - x)$ puis que, $\rho = \frac{3}{2+cos\theta}$

b) Soit la fonction, définie sur $\mathbb{R}$, $\rho : \theta \mapsto \rho(\theta)$.

En étudiant sa période, sa parité et son tableau de variation expliquer comment on retrouve le tracé de C du 2)b).

c) Soit $M' \in C$ d'affixe z' avec $argz' = \theta + \pi \quad (mod\ 2\pi)$.

Calculer $\left\|\overrightarrow{MM'}\right\|$ en fonction de θ.
